Correction de l'épreuve :

X-ENS – MP – 2024 – sujet B

I Première partie

1.a) D'après le théorème de Cauchy associé à l'équation différentielle linéaire résolue d'ordre 2
$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) = q(t)y(t), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$
il existe une unique solution $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifiant ces conditions.
De même avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
De plus, le wronskien $w(t) = \det\left(\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}\right)$ associé à la famille (y_1, y_2) est non nul en 0, donc (y_1, y_2) est un système fondamental de solution de (1), donc
$$\boxed{\mathcal{S}_{(1)} = \operatorname{Vect}(y_1, y_2).}$$

1.b) Notons à nouveau $w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$.
Alors w est de classe $\mathcal{C}^1$ car y_1, y_1', y_2 et y_2' le sont, et :
$$w'(t) = y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) = -q(t)\big(y_1(t)y_2(t) - y_1(t)y_2(t)\big) = 0.$$
Ainsi, w est constant sur $\mathbb{R}$. Or $w(0) = 1$, donc :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1}.$$

2. Notons $z : t \mapsto y(t + T)$.
Alors z est de classe $\mathcal{C}^2$ et $z''(t) = y''(t + T)$.
Or y est solution de (1), donc :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) = q(t)y(t) = 0.$$
d'où :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t + T) + q(t + T)y(t + T) = 0.$$
Or q est T périodique, donc :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) + q(t)z(t) = 0.$$
Ainsi, $\boxed{z : t \mapsto y(t + T) \text{ est solution de (1)}}$.

Alors, d'après la question **1.a)**, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $z = ay_1 + by_2$. Avec les définitions de y_1 et y_2, on obtient :
$$\begin{cases} z(0) = ay_1(0) + by_2(0) = a + 0, \\ z'(0) = ay_1'(0) + by_2'(0) = 0 + b, \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} z(0) = y(T), \\ z'(0) = y'(T). \end{cases}$$
D'où : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ y(t + T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t)}$.

3. Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{(1)} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{(1)} \\ y & \longmapsto & y(\_+T) \end{array}$ l'application linéaire résultant de la question **2**.
D'après la deuxième partie de la question **2**,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(y_1) = y_1(T)y_1 + y_1'(T)y_2, \\ \Phi(y_2) = y_2(T)y_1 + y_2'(T)y_2, \end{array} \right.$$

donc, la matrice de Φ dans la base $(y_1,\, y_2)$ (cf. question **1.a)**) est :

$$\mathcal{M}at_{(y_1,y_2)}(\Phi) = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est, d'après la question **1.b)** :

$$\chi_\Phi(X) = X^2 - \mathrm{tr}(\Phi)X + \det(\Phi) = X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1.$$

Alors :
la condition (a) dit exactement que Φ admet un vecteur propre associé à la valeur propre μ ;
la condition (b) dit exactement que μ est racine de χ_Φ, donc est valeur propre de Φ.
Donc :

$$\boxed{\text{(a)} \iff \text{(b)}}.$$

• Soit y une solution non nulle de (1) et soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{-\lambda t}y(t) \end{array}$ non nulle. Alors :

$$\begin{aligned} y(\_+T) = \mu y & \iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{\lambda(t+T)}u(t+T) = e^{\lambda T} \cdot e^{\lambda t}u(t) \\ & \iff \forall t \in \mathbb{R},\ u(t+T) = u(t) \\ & \iff u \text{ est } T\text{-périodique} \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\text{(a)} \iff \text{(c)}}.$$

4.a) Par hypothèse, μ_1 et μ_2 étant les deux racines distinctes de $X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1$, le terme constant vaut 1, donc $\mu_2 = \dfrac{1}{\mu_1} = e^{-\lambda T}$.
Pour tout $i \in \{1,\, 2\}$, l'équivalence (b) $\iff$ (c) de la question **3** fournit une fonction T-périodique w_i telle que, en notant $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\lambda_i}T = \mu_i$,

$$t \mapsto e^{\lambda_i t}w_i(t) \text{ est solution de (1).}$$

Posons $\lambda = \lambda_1$. Alors λ_2 est telle que $e^{\lambda_2 T} = \mu_2 = {\mu_1}^{-1} = e^{-\lambda_1 T}$,
donc $\lambda_1 = -\lambda_2$ (par injectivité de exp et le fait que $T \neq 0$).
Ainsi, les fonctions $f_1\ :\ t \mapsto e^{\lambda t}w_1(t)$ et $f_2\ :\ t \mapsto e^{\lambda t}w_2(t)$ sont solutions de (1).

• Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes.
Puisque f_1 n'est pas nulle, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f_1(t_0) \neq 0$, puis par continuité, f_1 ne s'annule pas sur un voisinage I de t_0. De plus, si f_2 était nulle sur I, f_2' le serait, donc f_2 coïnciderait avec la fonction nulle, d'après l'isomorphisme de Cauchy considéré en t_0.
Or f_2 est non nulle, donc f_2 n'est pas identiquement nulle sur I.
Il existe donc $t \in I$ tel que $f_1(t) \neq 0$ et $f_2(t) \neq 0$.
Alors :

$$\det\left(\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1(t+T) & f_2(t+T) \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ \mu_1 f_1(t) & \mu_2 f_2(t) \end{pmatrix}\right) = \underbrace{f_1(t)}_{\neq 0}\underbrace{f_2(t)}_{\neq 0}\underbrace{(\mu_2 - \mu_1)}_{\neq 0} \neq 0.$$

Donc $\boxed{\text{les solutions } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont linéairement indépendantes.}}$

• Donc elles constituent un système fondamental de solution.
Ainsi, $\boxed{\text{toute solution } y \text{ de (1) est combinaison linaire de } f_1 \text{ et } f_2}$, ce qu'il fallait démontrer.

4.b) A nouveau, le produit des racines μ_1 et μ_2 de $X^2 - (y_1(T) + y_2'(T))X + 1$ vaut 1, or $\mu_1 = \mu_2$, donc $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$.
Alors, l'équivalence (b) $\iff$ (a) de la question **3** montre que (1) admet une solution y non nulle vérifiant $y(\_ + T) = \mu_1 y$. Donc,

$$y(\_ + 2T) = \mu_1 y(\_ + T) = {\mu_1}^2\, y = y.$$

Par conséquent, y est $2T$-périodique.

$$\boxed{\text{On a bien trouvé une solution périodique de (1)}}.$$

II Deuxième partie

5.a) Soit $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,\,1] & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & x_1 + t(x_2 - x_1) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors, par convexité de V, $h \circ \gamma$ est à valeurs dans V. De plus, $h \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\forall t \in [0,\,1],\ (h \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}h(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) = \mathrm{d}h(\gamma(t)) \cdot (x_2 - x_1),$$

donc, puisque $\gamma(t) \in V$:

$$\forall t \in [0,\,1],\ \|(h \circ \gamma)'(t)\| \leqslant \|\mathrm{d}h(\gamma(t))\| \cdot \|x_2 - x_1\| \leqslant C\,\|x_2 - x_1\|.$$

Par l'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction $h \circ \gamma$ entre 0 et 1, il vient :

$$\|h(x_2) - h(x_1)\| = \|h \circ \gamma(1) - h \circ \gamma(0)\| \leqslant C\|x_2 - x_1\| \cdot |1 - 0|.$$

Ainsi,

$$\boxed{\|h(x_2) - h(x_1)\| \leqslant C\|x_2 - x_1\|}.$$

5.b) Comme U est un ouvert, il existe $R > 0$ tel que $B(a,\,R) \subset U$.
Comme $\mathrm{d}f$ est continue en a, il existe $R' \in]0,\,R[$ tel que pour tout $x \in B(a,\,R')$,

$$\|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{Id}_E\| = \|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{d}f(a)\| < \frac{1}{2}.$$

Appliquons la question **5.a)** appliquée à $h : \begin{array}{ccc} B(a,\,R') & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$:

$$\forall x_1, x_2 \in B(a,\,R'),\ \|f(x_2) - x_2 - (f(x_1) - x_1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|.$$

Donc :

$$\|x_2 - x_1\| - \|f(x_2) - f(x_1)\| \quad \leqslant \quad \|f(x_2) - f(x_1) - (x_2 - x_1)\| \quad \leqslant \quad \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|$$

Soit $r = R'/2$. Ce qui précède est a fortiori vrai pour tous $x_1,\, x_2 \in \overline{B(a,\,r)}$:

$$\boxed{\forall x_1,\, x_2 \in \overline{B(a,\,r)},\ \|f(x_2) - f(x_1)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|}.$$

5.c) Méthode 1.
On pourrait rappeler que nous avons choisi r à la question précédente tel que :

$$\forall x \in \overline{B(a,r)},\ \|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{Id}_E\| < \frac{1}{2}.$$

et conclure rapidement, mais cela ne semble pas être l'idée du concepteur du sujet.

- Méthode 2.

Soit $x \in B(a,\,r)$. Soit $v \in E$. Alors, puisque f est différentiable en x :

$$\mathrm{d}f(x) \cdot v = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Mais, pour t assez petit, $x+tv \in B(a,\, r)$ et d'après la question **5.b)**, $\|f(x+tv)-f(x)\| \geqslant \frac{1}{2}|t|\,\|v\|$.
donc pour tout t assez petit, $\left\| \dfrac{f(x+tv)-f(x)}{t} \right\| \geqslant \frac{1}{2}\|v\|$,
puis par passage à la limite, $\|\mathrm{d}f(x)\cdot v\| \geqslant \frac{1}{2}\|v\|$.
Donc $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x)) = \{0\}$. Ainsi, :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in B(a,\, r),\ \mathrm{d}f(x) \text{ est injective}}.$$

6.a) L'application f étant continue, $x \mapsto y_0 - f(x)$ l'est également.
Par continuité de la norme et de la fonction « carré » sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \|y_0 - f(x)\|^2$ l'est aussi.
Or $\overline{B(a,\, r)}$ est compact, donc la fonction g admet un minimum atteint en un point x_0 de $\overline{B(a,\, r)}$.
Or, pour tout $x \in \mathcal{S}(a,r) = \overline{B(a,\, r)} \setminus B(a,\, r)$, d'après la question **5.b)**,

$$\|f(x)-f(a)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x-a\| = \frac{r}{2}.$$

Donc :

$$\|y_0 - f(x)\| \geqslant \|f(x)-f(a)\| - \|y_0 - f(a)\| \geqslant \frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4}.$$

Puisque $g(a) = \|y_0 - f(a)\| \leqslant \dfrac{r}{4}$, le minimum de g n'est pas atteint sur $\mathcal{S}(a,r)$.
Donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ admet un minimum atteint en un point } x_0 \text{ de } B(a,\, r)}$.

6.b) Supposons que $f(x_0) \neq y_0$.

- Méthode 1.

Nous allons exhiber un point x_1 tel que $\|y_0 - f(x_1)\| < \|y_0 - f(x_0)\|$, ce qui contredit la définition de x_0. Pour ce faire, comme $\mathrm{d}f(x_0)$ est proche de Id_E, en prenant $x_1 = x_0 + t(y_0 - f(x_0))$ avec t assez petit, $f(x_1)$ devrait se rapprocher de y_0.
Soit $v = y_0 - f(x_0)$.
Par différentiabilité de f en x_0, il existe une fonction ε définie sur un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E telle que $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et :

$$\forall t \in I,\ y_0 - f(x_0+tv) = y_0 - \Big(f(x_0) + t\mathrm{d}f(x_0)\cdot v + t\varepsilon(t)\Big).$$

Quitte à choisir le voisinage I assez petit, on peut supposer que $\|\varepsilon(t)\| \leqslant \dfrac{\|v\|}{4}$.
Alors, pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
\|y_0 - f(x_0+tv)\| &= \big\|(1-t)v + t(\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x_0))\cdot v + t\varepsilon(t)\big\| \\
&\underset{(1)}{\leqslant} \big\|(1-t)v\big\| + |t|\,\big\|\mathrm{Id}_E - \mathrm{d}f(x_0)\big\|\cdot\|v\| + |t|\,\|\varepsilon(t)\|\big\| \\
&\underset{(2)}{\leqslant} \big\|(1-t)v\big\| + \frac{|t|}{2}\|v\| + \frac{|t|}{4}\|v\| \\
&\leqslant (1-t/4)\,\big\|v\big\|
\end{aligned}$$

(1) par inégalité triangulaire,
(2) car pour tout $x \in B(a,\, r)$, $\|\mathrm{d}f(x) - \mathrm{Id}_E\| \leqslant \dfrac{1}{2}$; en effet, c'est ainsi que nous avons défini r à la question **5.a)**.

Il existe donc $t > 0$ tel que $x_0 + tv \in B(a,\, r)$ car $x_0 \in B(a,\, r)$ d'après la question **6.a)**,
et tel que $\|y_0 - f(x_0+tv)\| < \|v\| = \|y_0 - f(x_0)\|$.
Ceci enfreint la définition de x_0. Donc $\boxed{f(x_0) = y_0}$.

• MÉTHODE 2.
On utilise astucieusement la question **5.c)**, *pour montrer qu'une certaine dérivée vaut* $\|y_0 - f(x_0)\|$. *Or celle-ci doit être nulle par minimalité de* g *en* x_0, *donc* $f(x_0) = y_0$.

D'après la question **5.c)**, $\mathrm{d}f(x_0)$ est injective, donc surjective en dimension finie.
Il existe donc v tel que $\mathrm{d}f(x_0) \cdot v = y - f(x_0)$. Alors,

$$\begin{aligned} y_0 - f(x_0 + tv) &\underset{t\to 0}{=} y_0 - f(x_0) - t\,\mathrm{d}f(x_0)\cdot v + o(t) \\ &\underset{t\to 0}{=} y_0 - f(x_0) - t(y_0 - f(x_0)) + o(t) \\ &\underset{t\to 0}{=} (1-t)(y_0 - f(x_0)) + o(t). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$, $x_0 + tv \in B(a, r)$ et

$$\left\| f(x_0 + tv) - \big(f(x_0) - t\,\mathrm{d}f(x_0)\cdot v\big) \right\| \leqslant \|y_0 - f(x_0)\|\,\varepsilon\,|t|.$$

On en déduit que pour tout $t \in]\alpha, \alpha[$:

$$(1 - t - \varepsilon|t|)\|y_0 - f(x_0)\| \leqslant \|y_0 - f(x_0 + tv)\| \leqslant (1 - t + \varepsilon|t|)\|y_0 - f(x_0)\|.$$

Donc :

$$\frac{-t - \varepsilon|t|}{t}\|y_0 - f(x_0)\| \leqslant \frac{\|y_0 - f(x_0+tv)\| - \|y_0 - f(x_0)\|}{t} \leqslant \frac{-t + \varepsilon|t|}{t}\|y_0 - f(x_0)\|.$$

et ainsi, la fonction $h : t \mapsto \|y_0 - f(x_0 + tv)\|$ est définie sur un voisinage de 0,
et d'après l'encadrement ci-dessus et le théorème des gendarmes, h est dérivable en 0 et :

$$h'(0) = -\|y_0 - f(x_0)\|.$$

Or par minimalité de g en x_0, h passe par un minimum en 0, donc $h'(x_0) = 0$.
Donc $\|y_0 - f(x_0)\|$, or on avait supposé que $y_0 \neq f(x_0)$. C'est absurde.
Donc, $\boxed{f(x_0) = y_0}$.

Remarque : le carré dans la définition de g semble inutile.

7.a) L'ensemble W est ouvert car c'est la boule ouverte de centre $f(a)$ et de rayon $\dfrac{r}{4}$.
L'ensemble V est ouvert comme intersection d'ouverts, $f^{-1}(W)$ étant ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.
Ainsi, $\boxed{V \text{ et } W \text{ sont des ouverts de } E}$.

7.b) • La restriction de f à V est continue car f est continue.
• D'après la question **5.b)**, la restriction de f à $\overline{B(a, r)}$ est injective,
donc a fortiori, $f_{|V}$ est injective.

• Par définition de V, $f(V) \subset W$.
De plus, pour tout $y_0 \in W$, d'après la question **6**, y_0 est atteint par f en un point $x_0 \in B(a, r)$.
Alors, $x_0 \in f^{-1}(W) \cap B(a, r)$, donc $x_0 \in V$. Ainsi, $f_{|V}$ est surjective sur W.

• Soient $y_1, y_2 \in W$ et notons x_1, x_2 leurs antécédents par $f_{|V}$.
Alors x_1, x_2 appartiennent à $\overline{B(a, r)}$, donc d'après la question **5.b)**,

$$\|{f_{|V}}^{-1}(y_2) - {f_{|V}}^{-1}(y_1)\| = \|x_2 - x_1\| \leqslant 2\|f_{|V}(x_2) - f_{|V}(x_1)\| = 2\|y_2 - y_1\|.$$

donc ${f_{|V}}^{-1}$ est 2-lipschitzienne, donc continue.
Ainsi,

$$\boxed{f_{|V} \text{ est continue et bijective de } V \text{ sur } W\text{, de réciproque continue}}.$$

III Troisième partie

8.a) Rappelons que $\mathbb{C}[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$.
$(\mathbb{C}[A])^*$ est le groupe des unités de cette algèbre.
Donc $\boxed{(\mathbb{C}[A])^* \text{ est un sous-groupe abélien de } GL_n(\mathbb{C})}$.

8.b) L'inclusion $\mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) \supset (\mathbb{C}[A])^*$ a lieu par définition de $(\mathbb{C}[A])^*$.
Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Alors 0 n'est pas valeur propre de M,
donc le polynôme minimal μ_M de M ne s'annule pas en 0, donc $\mu_M(0) \neq 0$.
Alors, le polynôme $Q = -\dfrac{\mu_M - \mu_M(0)}{\mu_M(0)X}$ est tel que :

$$Q(M)M = -\frac{\mu_M(M) - \mu_M(0)I_n}{\mu_M(0)} = I_n.$$

Donc $M \in (\mathbb{C}[A])^*$. Donc :

$$\boxed{(\mathbb{C}[A])^* = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})}.$$

9. Pour tout $M \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(M)$ est limite de polynômes en M, donc en A,
donc $\exp(M)$ appartient à l'adhérence de $\mathbb{C}[A]$.
Mais $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, donc est fermé,
donc $\exp(M) \in \mathbb{C}[A]$.
De plus, $\exp(-M)$ appartient également à $\mathbb{C}[A]$ et est l'inverse de $\exp(M)$ dans $GL_n(\mathbb{C})$,
donc $\exp(M) \in (\mathbb{C}[A])^*$.
Ainsi, $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \subset (\mathbb{C}[A])^*.}$

10.a) Soient (t,a), $(s,b) \in]0,1[\times\mathbb{R}$ tels que $t + iat(1-t) = s + ibs(1-s)$.
Alors en identifiant les parties réelles, on a $t = s$.
Puis, comme $t \in]0,1[$, $t(1-t) \neq 0$, donc l'égalité $iat(1-t) = ibt(1-t)$ induit $a = b$.
Ainsi, $\boxed{\begin{array}{ccc}]0,1[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,a) & \longmapsto & Z_a(t) \end{array} \quad \text{est injective}}$.

10.b) Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \det(zM_1 + (1-z)M_2) &= \det\big(M_2 + z(M_1 - M_2)\big) \\ &= \det\big(M_2(I_n + z(M_1{M_2}^{-1} - I_n)\big) \\ &= \det((-z)M_2)\det\big((I_n - M_1{M_2}^{-1}) - z^{-1}I_n\big) \\ &= (-z)^n \det(M_2)\chi_{(I_n - M_1{M_2}^{-1})}(z^{-1}) \end{aligned}$$

Soit alors $F = \{z^{-1}\ ;\ z \in \mathbb{C}^* \cap \mathrm{Sp}\big((I_n - M_1{M_2}^{-1})\big)\}$, un ensemble fini de $\mathbb{C}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^* \setminus F$, $\chi_{(I_n - M_1{M_2}^{-1})}(z^{-1}) \neq 0$.
Soit A l'ensemble des réels a tels qu'il existe $t \in]0,1[$ tel que $Z_a(t) \in F$.
D'après la question **10.a)**, $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(F)$. Donc $\boxed{\mathbb{R} \setminus A \neq \varnothing}$.
En prenant $a \in \mathbb{R} \setminus A$, on a : $\forall t \in]0,1[$, $Z_a(t) \neq 0$ et de plus :

$$\begin{array}{rcl}
a \in \mathbb{R} \setminus A & \Rightarrow & \forall t \in]0,\,1[,\ Z_a(t) \in \mathbb{C} \setminus F \\
& \Rightarrow & \forall t \in]0,\,1[,\ \chi_{(I_n - M_1 M_2{}^{-1})}(Z_a(t)^{-1}) \neq 0 \\
& \Rightarrow & \forall t \in]0,\,1[,\ \det\big(Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))M_2\big) \neq 0 \\
& \Rightarrow & \forall t \in]0,\,1[,\ \det\big(M(t)\big) \neq 0 \\
& \underset{(1)}{\Rightarrow} & \forall t \in]0,\,1[,\ M(t) \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) \\
& \underset{(2)}{\Rightarrow} & \forall t \in]0,\,1[,\ M(t) \in (\mathbb{C}[A])^* \\
& \underset{(3)}{\Rightarrow} & \forall t \in [0,\,1],\ M(t) \in (\mathbb{C}[A])^*
\end{array}$$

(1) Puisque $M_1, M_2 \in \mathbb{C}[A]$, pour tout t, $M(t) = Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))M_2 \in \mathbb{C}[A]$.
(2) d'après la question **8.b)**.
(3) car $M(0) = M_2$ et $M(1) = M_1$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall t \in [0,\,1],\ M(t) \in (\mathbb{C}[A])^*}$.

10.c) Soit a un réel fourni par la question **10.b)**.
Le chemin $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,\,1] & \longrightarrow & \mathbb{C}[A] \\ t & \longmapsto & Z_a(t)M_1 + (1 - Z_a(t))M_2 \end{array}$ est à valeurs dans $(\mathbb{C}[A])^*$ d'après la question **10.b)**.
De plus, Z_a étant polynomiale, γ est à coordonnées polynomiales, donc γ est continu.
Enfin, $\gamma(0) = M_2$ et $\gamma(1) = M_1$, donc γ réalise un chemin de M_2 à M_1 en restant dans $(\mathbb{C}[A])^*$, donc $\boxed{(\mathbb{C}[A])^* \text{ est connexe par arcs}}$.

11.a) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[A] & \longrightarrow & \mathbb{C}[A] \\ M & \longmapsto & \exp(M) \end{array}$. Remarquons que $\exp(0) = I_n$.

- Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\mathrm{d}f(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[A]}$.

Soit N une norme sous-multiplicative sur $\mathbb{C}[A]$.
En dimension finie, les normes sont équivalentes, donc il existe $\alpha,\ \beta > 0$ tels que :

$$\|\ \| \leqslant \alpha N \text{ et } N \leqslant \beta \|\ \|.$$

Pour tout $H \in \mathbb{C}[A]$ tel que $\|H\| \leqslant 1$, alors $N(H) \leqslant \beta$, puis :

$$\begin{array}{rcl}
\left\| \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|H^k\|}{k!} \\
& \leqslant & \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha N(H^k)}{k!} \\
& \leqslant & N(H^2)\alpha \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{N(H)^{k-2}}{k!} \\
& \leqslant & \beta\|H^2\|\alpha \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\beta^{k-2}}{k!} \\
& \leqslant & \alpha \exp(1+\beta)\|H^2\|
\end{array}$$

Donc :

$$\exp(H) \underset{\substack{H \to 0 \\ H \in \mathbb{C}[A]}}{=} I_n + H + o(H).$$

Puis pour tout $M \in \mathbb{C}[A]$ et tout $H \in \mathbb{C}[A]$, puisque $MH = HM$,

$$\exp(M+H) = \exp(M)\exp(H) \underset{\substack{H \to 0 \\ H \in \mathbb{C}[A]}}{=} \exp(M) + \exp(M)H + o(H).$$

Or l'application $H \mapsto \exp(M)H$ est linéaire, ce qui prouve $\boxed{\text{la différentiabilité de exp sur } \mathbb{C}[A]}$.

De plus, $\exp(0) = I_n$, donc $\boxed{\mathrm{d}\exp(0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[A]}}$.

Enfin, $\mathrm{d}\exp = L \circ \exp$ avec $L : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[A] & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{C}[A]) \\ M & \longmapsto & \{H \mapsto MH\} \end{array}$.

Or exp est continue et L est linéaire en dimension finie, donc continue, donc $\mathrm{d}\exp$ est continue.

Donc $\boxed{\text{exp est de classe } \mathcal{C}^1}$.

- Nous venons de montrer que l'application f vérifiait les hypothèses de la partie II.

Par conséquent, d'après la question **7**,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe un ouvert } U \text{ de } \mathbb{C}[A] \text{ contenant } 0 \text{ et un ouvert } V \text{ de } \mathbb{C}[A] \text{ contenant } I_n \\ \text{tels que exp induit une bijection continue de } U \text{ sur } V \\ \text{dont la réciproque est une fonction continue sur } V.\end{array}}$$

11.b) Soit $C \in \exp(\mathbb{C}[A])$ et $B \in \mathbb{C}[A]$ tel que $B = \exp(B)$.

Pour tout $D \in U$, $DB = BD$, donc $\exp(B + D) = \exp(B)\exp(D)$.

Or exp envoie le voisinage U de 0 sur V un voisinage de I_n.

Alors, exp envoie surjectivement le voisinage $B + U = \{B + D \; ; \; D \in U\}$ de B sur l'ensemble $CV = \{CD \; ; \; D \in V\}$.

Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[A] & \longrightarrow & \mathbb{C}[A] \\ M & \longmapsto & C^{-1}M \end{array}$; h est continue car linéaire en dimension finie.

Comme V est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$, l'ensemble $VC = h^{-1}(V)$ est ouvert de $\mathbb{C}[A]$ (contenant C).

Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de tous ses points, donc $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est un ouvert de } \mathbb{C}[A]}$.

12. Montrons que $(\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Soit $C \in (\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A])$.

Supposons qu'il existe $B' \in CV$ atteint par exp.

Soit $B \in \mathbb{C}[A]$ tel que $B' = \exp(B)$. Posons $D' = C^{-1}B' \in V$. Ainsi, $B' = CD'$.

Par surjectivité de $\exp_{|U}$ sur V, il existe $D \in U$ tel que $\exp(D) = D'$.

Alors $\exp(B - D) = \exp(B)\exp(-D) = B'(D')^{-1} = C$.

Ainsi, C est atteint : absurde !

Donc tout CV est dans $(\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A])$.

Or nous avons vu à la question **11.b)** que CV est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$, donc de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Donc $\boxed{(\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est ouvert}}$.

Or $\exp(\mathbb{C}[A])$ est inclus dans $(\mathbb{C}[A])^*$, donc $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) \text{ est un fermé de } (\mathbb{C}[A])^*}$.

13.a) D'après la question **11.b)**, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$,

or $\exp(\mathbb{C}[A])$ est inclus dans $(\mathbb{C}[A])^*$, donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Ainsi, d'après la question **12**, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ et $(\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A])$ sont des ouverts-fermés de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Posons $f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}[A])^* & \longrightarrow & (\mathbb{C}[A])^* \\ B & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } B \in \exp(\mathbb{C}[A]), \\ 1 \text{ si } B \notin \exp(\mathbb{C}[A]). \end{cases} \end{array}$

Alors $f^{-1}(\{0\}) = \exp(\mathbb{C}[A])$ et $f^{-1}(\{1\}) = (\mathbb{C}[A])^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[A])$ qui sont tous les deux ouverts.

Bien sûr, $f^{-1}((\mathbb{C}[A])^*)$ et $f^{-1}(\varnothing)$ sont aussi des ouverts de $(\mathbb{C}[A])^*$.

Donc l'image réciproque de tout ouvert de $\{0, 1\}$ par f est un ouvert. Donc :

$$\boxed{f \text{ est une application continue de } (\mathbb{C}[A])^* \text{ dans } \{0, 1\} \text{ telle que } f(M_1) = 0 \text{ et } f(M_2) = 1.}$$

13.b) Rappelons que d'après la question **10**, $(\mathbb{C}[A])^*$ est connexe par arcs.
Soit un chemin $c \in \mathcal{C}([0,\,1],\ (\mathbb{C}[A])^*)$ telle que $c(0) = M_1$ et $c(1) = M_2$.
Alors $g = f \circ c$ est une application continue de $[0,\,1]$ dans $\{0,\,1\}$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.
On obtient la partition $[0,\,1] = g^{-1}(\{0\}) \sqcup g^{-1}(\{1\})$ de $[0,\,1]$ en deux ouverts-fermés non vides.
C'est absurde d'après le cours, la supposition selon laquelle $\exp(\mathbb{C}[A]) \neq (\mathbb{C}[A])^*$ est fausse.
Ainsi, $\boxed{\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*}$.

• *Montrons que* $[0,\,1]$ *ne contient aucun ouvert-fermé contenant* 0 *mais pas* 1.
Si $[0,\,1]$ *en contenait un, appelons-le* W.
Soit $t = \sup(W)$. *Puisque* W *est fermé,* $t \in W$. *Puisque* $1 \notin W$, $t \neq 1$.
Or W *est ouvert, donc il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $]t-\varepsilon,\, t+\varepsilon[\, \cap [0,\,1] \subset W$.
Donc $t + \frac{\varepsilon}{2} \in W$, *ce qui contredit la définition de* t *: absurde !*

14. Bien entendu, $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors $A \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}[A])^*$ d'après la question **9**.
D'après la question **13**, $\exp(\mathbb{C}[A]) = (\mathbb{C}[A])^*$, donc il existe $B \in \mathbb{C}[A]$ tel que $\exp(B) = A$.
Ainsi, $\boxed{\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})}$.

IV Quatrième partie

15. Pour tout $X \in \mathcal{S}_{(2)}$, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T)$.
Or la dérivée de $t \mapsto X(t+T)$ est $t \mapsto X'(t+T)$, donc $X(\_+T) \in \mathcal{S}_{(2)}$.
Ceci nous permet de définir l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \Phi\ : & \mathcal{S}_{(2)} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{(2)} \\ & X & \longmapsto & \{t \mapsto X(t+T)\} \end{array}$$

D'après le théorème de Cauchy, $\mathcal{S}_{(2)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\,\mathbb{C}^n)$ de dimension n.
Alors $\mathrm{Sp}(\Phi)$ est non vide.
Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et Y un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre μ. Alors :

$$\boxed{Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\,\mathbb{C}^n) \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t+T) = \mu Y(t)}.$$

16.a) Par définition, le wronskien de la famille de solutions $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est le déterminant de M.
Or $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est une base de solutions, donc le wronskien n'est jamais nul, donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M(t) \in GL_n(\mathbb{C})}.$$

• De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, puisque les Y_i sont solutions :

$$\begin{aligned} M'(t) &= (Y_1'(t)|\cdots|Y_n'(t)) \\ &= (A(t)Y_1(t)|\cdots|A(t)Y_n(t)) \\ &= A(t)(Y_1(t)|\cdots|Y_n(t)) \\ &= A(t)M(t) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = A(t)M(t)}.$$

16.b) Pour tout $j \in [\![1,\,n]\!]$, nous avons vu question **15** que $Y_j(\_+T) \in \mathcal{S}$.
Alors il existe $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$Y_j(\_+T) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} Y_i.$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M(t)^{-1}M(t+T)E_j = M(t)^{-1}Y_j(t+T) = M(t)^{-1}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}Y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}M(t)^{-1}Y_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}E_i.$$

Ainsi, $M(t)^{-1}M(t+T) = \left(\alpha_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Cette dernière matrice est indépendante de t, donc

$$\boxed{M(t)^{-1}M(t+T) \text{ est indépendante de } t \in \mathbb{R}}.$$

16.c) Notons $P = M(0)^{-1}M(T)$. Alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$.
D'après la question **14**, exp est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$,
donc il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(C) = P$.
Posons $B = \dfrac{1}{T}C$. Alors $\exp(TB) = P$.
Or d'après la question **16.b)**, $\forall t \in \mathbb{R},\ M(t)^{-1}M(t+T) = P$, donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M(t+T) = M(t)\exp(TB)}.$$

16.d) Puisque $-tB$ et $(t+T)B$ commutent, $\exp(TB) = \exp(-tB)\exp((t+T)B)$.
Alors l'égalité obtenue question **16.c)** devient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M(t+T) = M(t)\exp(-tB)\exp((t+T)B),$$

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M(t+T)\exp(-(t+T)B) = M(t)\exp(-tB).$$

Donc l'application $Q\ :\ t \mapsto M(t)\exp(-tB)$ est T-périodique.
De plus, cette fonction est continue comme produit d'applications continues : M et $t \mapsto \exp(-tB)$.
Nous avons trouvé

$$\boxed{Q \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\, GL_n(\mathbb{C})) \text{ telle que : } \forall t \in \mathbb{R},\ M(t) = Q(t)\exp(tB)}.$$

17.a) Pour tout $i \in [\![1,\, n]\!]$, on note $Z_i\ :\ t \mapsto M(t)PE_i$.
Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Z_i'(t) = M'(t)PE_i = A(t)M(t)PE_i = A(t)Z_i(t)$.
Donc les colonnes $Z_1, \ldots,\, Z_n$ de $M(t)P$ appartiennent à l'espace des solutions $\mathcal{S}$.
Par ailleurs, $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $M(t) \in GL_n(\mathbb{C})$ d'après la question **16.a)**, donc $M(t)P \in GL_n(\mathbb{C})$.
Donc le wronskien de la famille $(Z_1, \ldots,\, Z_n)$ est non nul, donc :

$$\boxed{(Z_1, \ldots,\, Z_n) \text{ est une base de } \mathcal{S}}.$$

17.b) Soient $i \in [\![0,\, n-1]\!]$ et $k \in [\![1,\, n]\!]$.
L'application $\theta\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ C & \longmapsto & \frac{1}{i!}CN^iPE_k \end{array}$ est linéaire en dimension finie, donc continue,
puis $R_{i,k} = \theta \circ Q$ où Q est continue et T-périodique, donc $R_{i,k}$ est continue et T-périodique.

$$\begin{aligned}
Z_k(t) &= M(t)PE_k \\
&= Q(t)\exp(tN+tD)PE_k \\
&\underset{(1)}{=} Q(t)\exp(tN)\exp(tP\Delta P^{-1})PE_k \\
&\underset{(2)}{=} Q(t)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}N^iP\exp(t\Delta)P^{-1}PE_k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}Q(t)N^iP\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\Delta^j\right)E_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{(3)}{=} \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}Q(t)N^iP\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}(\Delta^jE_k) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}Q(t)N^iP\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}({\lambda_k}^jE_k) \\
&\underset{(4)}{=} \sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}Q(t)N^iPe^{\lambda_k t}E_k \\
&= e^{\lambda_k t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}Q(t)N^iPE_k \\
&= e^{\lambda_k t}\sum_{i=0}^{n-1}t^iR_{i,k}(t)
\end{aligned}$$

(1) car $DN = ND$ et $D = P\Delta P^{-1}$;
(2) par continuité de l'application linéaire $\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ C & \longmapsto & PCP^{-1}\end{array}$;
(3) par continuité de l'application linéaire $\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ C & \longmapsto & CE_k\end{array}$;
(4) par continuité de l'application linéaire $\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ z & \longmapsto & zE_k\end{array}$.

Donc $\boxed{\text{pour tous } k \text{ et } t,\ Z_k(t) = e^{\lambda_k t}\sum_{i=0}^{n-1}t^iR_{i,k}(t)}$.

17.c) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Rappelons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^{\lambda_k t}| = e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}$.
Alors, si $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$, pour tout polynômes $S \in \mathbb{C}[X]$, $e^{\lambda_k t}S(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Or les coordonnées de $Z_k(t)$ sont de cette forme, donc $Z_k(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Or toute solution Y de (2) est combinaison linéaire des Z_k d'après la question **17.a)**.
Donc par linéarité de la limite, $\boxed{Y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$.

18.a) Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ tel que $\lambda = i\frac{2k\pi}{mT}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Soit V un vecteur propre de B associé à λ. Alors :

$$\exp(tB)V = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^\ell}{\ell!}B^\ell V = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^\ell}{\ell!}\lambda^\ell V = e^{t\lambda}V.$$

Alors $f : t \mapsto M(t)V$ est solution de (2), non nulle car $V \neq 0$, et d'après la question **16.d)**,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = Q(t)\exp(tB)V = e^{\lambda t}Q(t)V.$$

Or $t \mapsto e^{t\lambda}$ est mT-périodique car $mT\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$,
et Q est T-périodique, donc mT-périodique,
donc $\boxed{f \text{ est une solution non nulle } mT\text{-périodique}}$.

18.b) Soit f une solution non nulle mT-périodique.
Puisque $(Y_1, \dots, Y_n)$ forme une base de solutions, il existe $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = (Y_1(t)|\cdots|Y_n(t))V = M(t)V.$$

Or $M(mT) = M(0)\exp(TB)^m = M(0)\exp(mTB)$ d'après la question **16.c)**.
Donc l'égalité $f(mT) = f(0)$ se traduit par : $M(0)\exp(mTB)V = M(0)V$.

Mais $M(0) \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $\exp(mTB)V = V$.
Donc le sous-espace $\mathrm{Ker}\,(\exp(mTB) - I_n) = \mathrm{Ker}\,(\exp(TB)^m - I_n)$ est non trivial.
Or $X^m - 1 = \displaystyle\prod_{\ell=0}^{m-1} (X - \zeta_\ell)$ où les ζ_ℓ sont les racines m-èmes de l'unité.
Les polynômes $X - \zeta_\ell$ sont premiers deux à deux, donc par le lemme des noyaux :

$$\mathrm{Ker}\,(\exp(TB)^m - I_n) = \bigoplus_{\ell=0}^{m-1} \mathrm{Ker}\,(\exp(TB) - \zeta_\ell I_n).$$

Puisque le membre de gauche n'est pas trivial, l'un des sous-espaces propres apparaissant à droite n'est pas trivial.
Ainsi, $\boxed{\exp(TB) \text{ possède une valeur propre de la forme } \zeta_\ell, \text{ une racine } m\text{-ème de l'unité}}$.

19. Par T-périodicité de A, on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A(t + kT)X(t). \tag{1}$$

De plus, par T'-périodicité de X, on a :

$$\forall k, \ell \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t - \ell T') = A(t + kT)X(t - \ell T'),$$

d'où par changement de variables,

$$\forall k, \ell \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A(t + kT + \ell T')X(t). \tag{2}$$

Or pour tout t, $X'(t) = A(t)X(t)$, donc :

$$\forall k, \ell \in \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbb{R},\ A(t)X(t) = A(t + kT + \ell T')X(t).$$

Notons $G = \{kT + \ell T'\ ;\ (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2\} = T\mathbb{Z} + T'\mathbb{Z}$.
Si G était un sous-groupe de $\mathbb{R}$ de la forme $a\mathbb{Z}$, alors T et T' seraient des multiples entiers de a, donc on aurait $T' \in \mathbb{Q}T$, ce qui n'est pas le cas. Donc G est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$.
Soient $t, u \in \mathbb{R}$ et $(g_\ell)_\ell \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $u - t$.
Alors par continuité de A, $A(t + g_\ell) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} A(t + u - t) = A(u)$.
Alors $A(t + g_\ell)X(t) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} A(u)X(t)$.
Mais pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $A(t)X(t) = A(t + g_\ell)X(t)$, donc $A(t + g_\ell)X(t) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} A(t)X(t)$.
Finalement, $\boxed{\forall t, u \in \mathbb{R},\ A(t)X(t) = A(u)X(t)}$.

20. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathbb{U}_m$ l'ensemble des racines m-èmes de l'unité.

• *Cas 1 : recherche de solution T'-périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.*
Soit X une solution T'-périodique non nulle avec $T' \notin \mathbb{Q}T$.
Notons $V = \mathrm{Vect}(X(t)\ ;\ t \in \mathbb{R})$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $\frac{X(t+h)-X(t)}{h} \in V$, or V est fermé, donc $X'(t) \in V$.
Or $\forall t \in \mathbb{R},\ A(t)X(t) = X'(t)$. Ainsi, $A(t)V \subset V$.
Alors, par hypothèse, puisque $V \neq \{0\}$, $V = \mathbb{C}^n$.
Soient $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ tels que $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.
Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d'après la question **19**, $A(u)X(t_i) = A(t_i)X(t_i)$.
Ainsi, $A(u)$ est déterminé sur une base de $\mathbb{C}^n$ de façon indépendante de u, donc $\boxed{A \text{ est constante}}$.
Soit Y un vecteur propre de $A(0)$.
Alors $\mathbb{R}Y$ est stable par $A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui enfreint l'hypothèse sur A dès que $n \geqslant 2$.
Si $n = 1$, et A étant une constante non nulle, on n'a aucune solution périodique.
Si $n = 1$ et $A = 0$, alors les solutions sont les fonctions constantes, qui sont toutes périodiques.
Donc :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } n \geqslant 2, & \text{il n'existe pas de solution } T'\text{-périodique non nulle avec } T' \notin \mathbb{Q}T, \\ \text{si } n = 1, & \text{il faut et il suffit que } A = 0 \text{ pour qu'il existe des solutions } T'\text{-périodiques} \\ & \text{non nulles avec } T' \notin \mathbb{Q}T. \end{array}}$$

• *Cas 2 : recherche de solution T'-périodique non nulle avec $T' \in \mathbb{Q}T$.*
Soit X une solution T'-périodique non nulle avec $T' \in \mathbb{Q}T$.
Alors il existe $m, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $T' = \frac{m}{p}T$, donc X est mT-périodique.
Donc d'après la question **18.b)**, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ telle que :

$$e^{\frac{2i\ell\pi}{m}} \in \mathrm{Sp}(\exp(TB)).$$

Or, comme on le voit en trigonalisant B, $\mathrm{Sp}(\exp(TB)) = \exp(\mathrm{Sp}(TB)) = \{e^{T\lambda}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(B)\}$.
Il existe donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ tel que $e^{T\lambda} = e^{\frac{2i\ell\pi}{m}}$.
Donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $T\lambda = \frac{2i\ell\pi}{m} + 2iq\pi = \frac{2i(\ell+mq)\pi}{m}$.
Finalement, une condition nécessaire à l'existence de solutions T'-périodiques non nulle avec $T' \in \mathbb{Q}T$ est :

$$B \text{ possède une valeur propre de la forme } \lambda \in i\frac{2\pi}{T}\mathbb{Q}.$$

Réciproquement, d'après la question **18.a)**, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que B possède une valeur propre de la forme $\lambda = i\frac{2k\pi}{mT}$, alors (2) possède une solution mT-périodique.

• *Conclusion.*
Finalement, en tenant rassemblant les deux cas, (2) admet au moins une solution périodique non nulle si et seulement si :

$$A = 0 \text{ (et alors } n = 1) \text{ ou } \mathrm{Sp}(B) \cap \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q} \neq \varnothing.$$

Or sous l'hypothèse, $A = 0$ en dimension $n = 1$, les solutions de (2) sont constantes, donc la forme normale s'écrit $M(t) = Q(t)\exp(tB)$ avec Q constante et B nulle.
(il n'y a pas unicité de la forme normale, mais lorsque M est périodique, il semble raisonnable d'imposer $B = 0$).
Ce cas $B = 0$ rentre évidemment dans le cas où $\mathrm{Sp}(B) \cap \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q} \neq \varnothing$ (A noter que dans ce cas, T n'est pas bien défini, ce qui n'est pas gênant).
On propose alors la CNS pour l'existence de solution périodique non nulle :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) \cap \frac{2i\pi}{T}\mathbb{Q} \neq \varnothing.}$$

21.

- Soit $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

Posons $\Lambda : t \mapsto M(t)^{-1}Y(t)$. Ainsi, $\Lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ et :

$$\begin{aligned}
Y \in \mathcal{S}_{(3)} \quad &\iff \quad \forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t) \\
&\iff \quad \forall t \in \mathbb{R},\ M'(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) = A(t)M(t)\Lambda(t) + b(t) \\
&\underset{(1)}{\iff} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ M(t)\Lambda'(t) = b(t) \\
&\iff \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \Lambda'(t) = M(t)^{-1}b(t) \\
&\iff \quad \exists C \in \mathbb{C}^n \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \Lambda(t) = C + \int_0^t M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s \\
&\iff \quad \exists C \in \mathbb{C}^n \mid \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = M(t)C + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

(1) car $\forall t \in \mathbb{R},\ M'(t) = A(t)M(t)$ d'après la question **16.a)**. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{S}_{(3)} = \left\{ t \mapsto M(t)C + M(t)\int_0^t M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s\ ;\ C \in \mathbb{C}^n \right\}}.$$

- Soit $Y \in \mathcal{S}_{(3)}$.

Si Y est T-périodique, alors $Y(T) = Y(0)$.
Réciproquement si $Y(T) = Y(0)$, posons $Z : t \mapsto Y(t+T) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.
Alors Z vérifie l'équation :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ Z'(t) = Y'(t+T) = A(t+T)Y(t+T) + b(t+T) = A(t)Z(t) + b(t); \\ Z(0) = Y(T) = Y(0) \end{cases}$$

Ainsi, Z et Y vérifient l'équation (3) avec la même condition initiale, donc $Z = Y$, donc Y est T-périodique. Nous avons montré que :

$$\boxed{\forall Y \in \mathcal{S}_{(3)},\ \big(\forall t \in \mathbb{R},\ Y(t+T) = Y(t)\big) \iff Y(T) = Y(0)}.$$

- Soit $Y \in \mathcal{S}_{(3)}$. Examinons la condition $Y(T) = Y(0)$ sachant que $Y \in \mathcal{S}_{(3)}$.

$$\begin{aligned}
Y(0) = Y(T) \quad &\iff \quad M(0)C = M(T)C + M(T)\int_0^T M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s \\
&\iff \quad Q(0)C = Q(T)\exp(TB)C + Q(T)\exp(TB)\int_0^T M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s \\
&\underset{(1)}{\iff} \quad C = \exp(TB)C + \exp(TB)\int_0^T M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s \\
&\iff \quad \big(I_n - \exp(TB)\big)C = \exp(TB)\int_0^T M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s \\
&\underset{(2)}{\iff} \quad C = \big(I_n - \exp(TB)\big)^{-1}\exp(TB)\int_0^T M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s \\
&\iff \quad C = \big(\exp(TB) - I_n\big)\int_0^T M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

(1) d'une part, $Q(T) = Q(0)$, d'autre part, $M(0) \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $Q(0) \in GL_n(\mathbb{C})$;
(2) puisque $1 \notin \mathrm{Sp}(\exp(TB))$, $I_n - \exp(TB) \in GL_n(\mathbb{C})$.

Or $Y(0) = M(0)C = Q(0)C$. Nous avons donc montré :

$$\boxed{\forall Y \in \mathcal{S}_{(3)},\ Y(T) = Y(0) \iff Y(0) = Q(0)\big(\exp(TB) - I_n\big)\int_0^T M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s}.$$

En rassemblant les trois derniers résultats encadrés, nous avons montré que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'équation (3) admet une unique solution périodique.}\\ \text{Celle-ci est caractérisée par la condition initiale :}\\ \qquad Y(0) = Q(0)\big(\exp(TB) - I_n\big)\displaystyle\int_0^T M(s)^{-1}b(s)\mathrm{d}s.\end{array}}$$

22. En notant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(t) \\ \cos(t) & 1 \end{pmatrix}$, le système s'écrit $X'(t) = A(t)X(t)$.
Notons $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A(t) = I_2 + \cos(t)J$.
Notons $M(t) = \exp\left(\displaystyle\int_0^t A(s)\mathrm{d}s\right) = \exp\left(\displaystyle\int_0^t (I_2 + \cos(s)J)\mathrm{d}s\right) = e^t \exp(\sin(t)J)$.
Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} I_2 & \text{si } k \equiv 0 \ [2], \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} J & \text{si } k \equiv 1 \ [2]. \end{cases}$
Donc :

$$\begin{aligned} \exp(\sin(t)J) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin(t)^\ell}{\ell!} J^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin(t)^{2\ell}(-1)^\ell}{(2\ell)!} I_2 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin(t)^{2\ell+1}(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} J \\ &= \cos(\sin(t))I_2 + \sin(\sin(t))J. \end{aligned}$$

Ainsi, $M(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(\sin(t)) & -\sin(\sin(t)) \\ \sin(\sin(t)) & \cos(\sin(t)) \end{pmatrix}$ et comme prévu :

$$\begin{aligned} M'(t) &= e^t \begin{pmatrix} \cos(\sin(t)) & -\sin(\sin(t)) \\ \sin(\sin(t)) & \cos(\sin(t)) \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -\cos(t)\sin(\sin(t)) & -\cos(t)\cos(\sin(t)) \\ \cos(t)\cos(\sin(t)) & -\cos(t)\sin(\sin(t)) \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & -\cos(t) \\ \cos(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sin(t)) & -\sin(\sin(t)) \\ \sin(\sin(t)) & \cos(\sin(t)) \end{pmatrix} \\ &= A(t)M(t). \end{aligned}$$

Puisque $M(0) = I_2$, les colonnes de M forment une base de solutions.
Donc M joue bien le même rôle que la matrice M introduite à la suite de la question **15**.
La fonction A est 2π-périodique.
On peut écrire :

$$\boxed{M(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\sin(t)) & -\sin(\sin(t)) \\ \sin(\sin(t)) & \cos(\sin(t)) \end{pmatrix}}_{Q(t)} \exp(tI_2)}.$$

La partie Q est bien 2π-périodique. Il s'agit donc bien de la forme normale de M.

Impressions générales

Première partie. Raisonnements très classiques sur l'aspect algébrique de l'ensemble des solutions d'une **équation différentielle scalaire d'ordre 2** sans second membre. Par exemple, certaines solutions sont perçues comme vecteurs propres d'un endomorphisme implicite de l'espace des solutions.

Deuxième partie. Le chapitre de cours visé par cette partie est celui de la **différentiabilité**. On y démontre le théorème d'inversion locale. A noter qu'ici, la partie délicate (la surjectivité locale) n'est pas démontrée à l'aide d'un théorème de point fixe, mais par minimisation. L'enchaînement des questions est un peu déroutant. La question 6.b) est peut-être la question la plus délicate du sujet. Malheureusement, elle s'appuie sur une fonction g définie comme étant le carré d'une norme, or la norme n'étant pas euclidienne, ce carré est perturbant.

Troisième partie. Raisonnements toujours très classiques sur la **connexité par arcs**. Par un argument de connexité, on prouve que l'exponentielle au départ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$. Le théorème d'inversion locale obtenu à la partie II est appliqué à l'exponentielle restreinte à une sous-algèbre commutative, afin d'en simplifier la différentielle.

Quatrième partie. On revient dans le thème des **équations différentielles linéaires**, cette fois-ci **vectorielles d'ordre** n. On utilise le résultat de la partie III pour obtenir une certaine « forme normale » d'une résolvante de l'équation différentielle considérée. Partant de là, on en déduit quelques résultats épars. Le sujet n'indique pas quels sont les résultats visés, si bien que l'on s'interroge au terme de chaque question du problème sur la nature du résultat obtenu : est-ce un résultat intermédiaire ou un résultat final ? Par exemple, les questions 17, 20, 21, 22 sont indépendantes entre elles.

Remarques générales. Les quatre parties sont dans une large mesure indépendantes les unes des autres, et chacune reste cantonnée dans un même chapitre du cours de Maths Spé, ce qui permet de faire de chacune d'excellents DM sur les chapitres afférents, d'autant plus que les méthodes utilisées sont typiques des chapitres concernés.

En revanche, le sujet vu dans sa globalité est beaucoup trop long pour quatre heures et contenait beaucoup de questions très classiques ou faciles. L'inconvénient de ce type de sujets en concours est de favoriser les candidats dont la stratégie consiste à passer rapidement d'une question à la suivante dès qu'ils rencontrent une difficulté.

Enfin, on peut regretter le manque d'originalité du sujet. Certains candidats bien préparés se sont probablement sentis en terrain connu, ce qui en principe n'est pas le but recherché à l'X et aux ENS.