

Epreuve de Mathématiques A PSI

durée : 3 heures

Partie I : Expression des solutions de (L) .

1. L'ensemble des solutions de (L_0) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2. Une base est formée par les deux fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$. Une autre base est formée des fonctions $x \mapsto sh(x)$ et $x \mapsto ch(x)$.
2. L'ensemble des solutions de (L) est un espace affine de direction l'ensemble des solutions de (L_0) .

$$3. h(x) = \int_0^x \frac{e^{x-t} - e^{t-x}}{2} b(t) dt = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t) dt - e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t) dt$$

Par dérivation simple, comme b est continue, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$h'(x) = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t) dt + e^x \frac{e^{-x} b(x)}{2} + e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t) dt - e^{-x} \frac{e^x b(x)}{2}$$

$$h'(x) = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t) dt + e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t) dt$$

De même :

$$h''(x) = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{2} b(t) dt - e^{-x} \int_0^x \frac{e^t}{2} b(t) dt + b(x)$$

Et, pour tout $x \in [0, 1]$, $h''(x) - h(x) = b(x)$. h est solution de (L) .

4. Les solutions de (L) s'écrivent donc sous la forme :

$$\forall x \in [0, 1], y(x) = Ach(x) + Bsh(x) + h(x)$$

où A et B sont des constantes réelles.

5. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et s une solution (L) . Il existe deux réels A, B tels que, pour tout x de $[0, 1]$, $s(x) = Ach(x) + Bsh(x) + h(x)$.

$$\text{La condition } \begin{cases} s(0) = \alpha sh(1) \\ \text{et} \\ s(1) = \beta sh(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s(0) = \alpha sh(1) = A \\ s(1) = \beta sh(1) = Ach(1) + Bsh(1) + \int_0^1 sh(1-t)b(t) dt \end{cases}$$

Système qui permet de déterminer A, B donc s de manière unique.

Partie 2 : Développement en série de Fourier de la fonction H .

On fixe x dans $[0, 1]$ et soit φ la fonction impaire, 2-périodique, définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \varphi(t) = \begin{cases} \frac{sh(1-x)}{sh(1)} sh(t) & \text{si } 0 \leq t \leq x \\ \frac{sh(x)}{sh(1)} sh(1-t) & \text{si } x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1. Pour $x = 1/4$ on a :
 φ est croissante sur $[0, 1/4]$ (de la forme $t \mapsto ksh(t)$), décroissante sur $[1/4, 1]$,

continue en $1/4$. $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. La valeur maximum sur $[0, 1]$ est $\varphi(1/4) \simeq 0,18$. Par imparité on connaît donc complètement φ sur $[-1, 1]$, puis par 2-périodicité sur $[-2, 2]$.

2. φ est impaire donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(\varphi) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\varphi) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \varphi(t) \sin(n\omega t) dt$ avec $T = 2$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.

Comme φ est impaire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(\varphi) = 2 \int_0^1 \varphi(t) \sin(n\pi t) dt$ On obtient :

$$b_n(\varphi) = 2 \int_0^x \frac{sh(1-x)}{sh(1)} sh(t) \sin(n\pi t) dt + 2 \int_x^1 \frac{sh(x)}{sh(1)} sh(1-t) \sin(n\pi t) dt$$

Après calculs (!!) : $b_n(\varphi) = \frac{2 \sin(\pi n x)}{n^2 \pi^2 + 1}$

3. On vérifie que la fonction φ est continue sur $]0, 1[$ (pas de problème en $t = x$) ; comme $\varphi(0) = 0$, elle est continue sur $] - 1, 1[$. Comme $\varphi(1) = \varphi(-1) = 0$ le prolongement périodique reste continu. De plus la fonction est de classe C^1 par morceaux. La série de Fourier de φ converge normalement vers φ .

4. Par suite, pour x fixé, $\forall t \in [0, 1]$, $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \sin(n\pi x)}{n^2 \pi^2 + 1} \sin(\pi n t)$

Vu la définition de φ on a bien :

$$\forall (x, t) \in [0, 1]^2, H(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x) \sin(\pi n t)}{n^2 \pi^2 + 1}$$

Partie 3 : Etude d'un endomorphisme auto-adjoint défini par H.

Soit Ψ l'application qui à tout élément f de E associe $\Psi(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \Psi(f)(x) = \int_0^1 H(x, t) f(t) dt$$

1. Il faut montrer que, pour tout $f \in E$, $\Psi(f)$ est bien définie et est une fonction continue.

Par hypothèse H est continue sur le fermé borné $(0, 1]^2$ de $\mathbb{R}^2$. Elle est donc bornée sur $[0, 1]^2$. Notons M tel que $\forall (x, t) \in [0, 1]^2$, $|H(x, t)| \leq M$.

Soit alors $f \in E$; montrons que toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre sont réunies :

$\forall x \in [0, 1]$, $t \mapsto H(x, t)f(t)$ est continue donc intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$

$\forall t \in [0, 1]$, $x \mapsto H(x, t)f(t)$ est continue sur l'intervalle $[0, 1]$

$\forall x \in [0, 1], \forall t \in [0, 1], |H(x, t)f(t)| \leq M|f(t)| \leq M\|f\|_\infty$

avec $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. La fonction constante $t \mapsto M\|f\|_\infty$ est intégrable

sur $[0, 1]$. L'hypothèse de domination est vérifiée.

$\Psi(f)$ existe et est continue sur $[0, 1]$. $\Psi(f) \in E$.

La linéarité de Ψ est évidente. Ψ est un endomorphisme de E .

2. $f \in E$, $x \in [0, 1]$: d'après l'expression de H trouvée en 4

$$\Psi(f)(x) = 2 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi nx)}{n^2 \pi^2 + 1} \sin(\pi nt) \right) f(t) dt$$

Pour x fixé notons $g_n : t \mapsto \frac{\sin(\pi nx)}{n^2 \pi^2 + 1} \sin(\pi nt) f(t)$

Les g_n sont des fonctions continues et intégrables sur $[0, 1]$.

La série $\sum g_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $t \mapsto H(x, t) f(t)$ qui est continue donc intégrable sur $[0, 1]$.

De plus $v_n = \int_0^1 |g_n(t)| dt \leq \int_0^1 \frac{|f(t)|}{n^2 \pi^2 + 1} dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

La série $\sum v_n$ est convergente. On a donc : $\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 g_n(t) dt \right)$

On a donc, pour tout x :

$$\Psi(f)(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi nx)}{n^2 \pi^2 + 1} \left(\int_0^1 f(t) \sin(\pi nt) dt \right)$$

3. Soit $G \in L(E)$. G est auto-adjoint ssi $\forall (f, g) \in E^2$, $(G(f)|g) = (f|G(g))$

$$\forall (f, g) \in E^2, (\Psi(f)|g) = \int_0^1 \Psi(f(x)) g(x) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 H(x, t) f(t) dt \right) g(x) dx$$

Les applications sont continues, le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$(\Psi(f)|g) = \int_0^1 \int_0^1 H(x, t) f(t) g(x) dx dt = \int_0^1 \int_0^1 H(u, v) f(v) g(u) du dv = (f|\Psi(g))$$

Ψ est un endomorphisme auto-adjoint de E .

4. En reprenant l'expression de la question 2 :

$$\forall f \in E, (\Psi(f)|f) = \int_0^1 \left(2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi nx)}{n^2 \pi^2 + 1} \right) \left(\int_0^1 f(t) \sin(\pi nt) dt \right) f(x) dx$$

$$\forall f \in E, (\Psi(f)|f) = 2 \left(\int_0^1 f(t) \sin(\pi nt) dt \right) \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi nx)}{n^2 \pi^2 + 1} \right) f(x) dx$$

Le même raisonnement que la question 2 donne :

$$(\Psi(f)|f) = 2 \left(\int_0^1 f(t) \sin(\pi nt) dt \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{\sin(\pi nx)}{n^2 \pi^2 + 1} f(x) dx \right)$$

$$(\Psi(f)|f) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\int_0^1 f(t) \sin(\pi nt) dt \times \int_0^1 \sin(\pi nx) f(x) dx}{n^2 \pi^2 + 1} \right)$$

$$(\Psi(f)|f) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\int_0^1 f(t) \sin(\pi nt) dt \right)^2}{n^2 \pi^2 + 1} \geq 0$$

5. Soit $u \in E$ tel que $(\Psi(u)|u) = 0$.

5.1 La somme précédente est composée de termes positifs ; sa nullité entraîne que tous les termes sont nuls. $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 u(x) \sin(\pi n x) dx = 0$

5.2 L'énoncé indique :

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2-périodique telle que :

$$F : x \in (0, 1] \mapsto F(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 2 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Comme F est supposée impaire, il y a une erreur et on prendra donc $F(0) = 0$ et $F(-1) = F(1) = 2$

Les coefficients de Fourier se calculent comme dans la question 2 de la partie 2. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(F) = 0$;

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(F) = 2 \int_0^1 F(t) \sin(n\pi t) dt = 2 \int_0^1 u(t) \sin(n\pi t) dt = 0$$

Les coefficients de Fourier de F sont tous nuls ; F est continue par morceaux, la relation de Parseval nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 F^2(x) dx = 0 = \frac{2}{2} \int_0^1 F^2(x) dx = \int_0^1 u^2(x) dx.$$

5.3 Si u vérifie $(\Psi(u)|u) = 0$ alors, comme u est continue sur $[0, 1]$, $\int_{]0,1[} u^2(t) dt = \int_{[0,1]} u^2(t) dt = 0$. La positivité et la continuité entraînent u^2 donc u nulle sur $[0, 1]$. Par contraposée :

Pour toute fonction v différente de la fonction nulle, $(\Psi(v)|v) > 0$.

5.4 Soit λ une valeur propre de Ψ et v un vecteur propre associé.

v est non nulle et $(\Psi(v)|v) = (\lambda v|v) = \lambda \|v\|^2 > 0$; comme $\|v\| > 0$, $\lambda > 0$.

6. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction f_m définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_m(x) = \sin(\pi m x)$$

$$6.1 \quad \int_0^1 \sin(\pi p x) \sin(\pi q x) dx = \int_0^1 \frac{\cos((p+q)\pi x) + \cos((p-q)\pi x)}{2} dx.$$

$$\text{Si } p \neq q, \quad \int_0^1 \sin(\pi p x) \sin(\pi q x) dx = \left[\frac{\sin((p+q)\pi x)}{2(p+q)} + \frac{\sin((p-q)\pi x)}{2(p-q)} \right]_0^1$$

$$\text{Si } p \neq q, \quad (f_p, f_q) = \int_0^1 \sin(\pi p x) \sin(\pi q x) dx = 0$$

$$\text{Si } p = q, \quad (f_p, f_q) = \frac{1}{2}$$

6.2 Soit $m \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule de la question 2, pour tout x :

$$\Psi(f_m)(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2 \pi^2 + 1} \left(\int_0^1 f_m(t) \sin(\pi n t) dt \right) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n^2 \pi^2 + 1} (f_m | f_n)$$

$$\Psi(f_m)(x) = 2 \frac{(f_m | f_m)}{m^2 \pi^2 + 1} \sin(\pi m x) \quad \Psi(f_m) = \frac{f_m}{m^2 \pi^2 + 1}$$

7. Soit λ une valeur propre de Ψ et f_λ un vecteur propre associé.

7.1 Soit s la solution de l'équation $y'' - y = f$ vérifiant les conditions de la partie 1 question 5 avec $\alpha = \beta = 0$. s est de classe c^2 sur $(0, 1]$.

Pour tout x : $s(x) = \alpha sh(1-x) + \beta sh(x) - \Psi(f)(x) = -\Psi(f)(x)$
 $\Psi(f) = -s$ est donc également de classe c^2 . Comme $\lambda > 0$, si f_λ est un vecteur propre associé, $f_\lambda = \frac{1}{\lambda}\Psi(f_\lambda)$ est donc aussi de classe c^2 .

7.2 Si $\alpha = \beta = 0$, $s = -\Psi(f)$ vérifie $s'' - s = f$ avec $s(0) = s(1) = 0$.

Donc si $\Psi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$, $\lambda \neq 0$ on a :

$(-\lambda f_\lambda)'' - (-\lambda)f_\lambda = f_\lambda$ avec $f_\lambda(0) = f_\lambda(1) = 0$.

f_λ est solution du problème :
$$\begin{cases} y''(x) - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

7.3 Si $\lambda = 1$ était valeur propre, pour f_1 associée, $f_1'' = 0 \Rightarrow f_1$ affine.

La condition $f_1(0) = f_1(1) = 0$ entraîne $f_1 = 0$. Contradiction.

1 n'est pas valeur propre de Ψ .

7.4 Notons $c = 1 - \frac{1}{\lambda}$. Si $c > 0$, la solution générale de $y'' - cy = 0$ est :

$$y(x) = ae^{\sqrt{c}x} + be^{-\sqrt{c}x}$$

La condition $y(0) = 0 = y(1)$ implique $a = b = 0$. Seule la fonction nulle est solution, on ne peut trouver de vecteur propre. λ ne peut être valeur propre dans ce cas.

7.5 Lorsque $1 - \frac{1}{\lambda} < 0$, soit $\omega = \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}$.

La solution générale de $y'' + \omega^2 y = 0$ est $y(x) = a \sin(\omega x) + b \cos(\omega x)$.

$y(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ et avec $b = 0$, $y(1) = 0 \Rightarrow a \sin(\omega) = 0$.

Si $\sin(\omega) \neq 0$, $b = 0$ et seule la fonction nulle est solution. λ n'est pas valeur propre.

Les valeurs propres éventuelles sont donc telles que ω est de la forme $\omega = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas $\lambda = \frac{1}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + k^2\pi^2}$ et $f_\lambda = b f_k$.

Les valeurs propres sont donc de la forme $\lambda = \frac{1}{m^2\pi^2 + 1}$, $m \in \mathbb{N}^*$ (1 n'est pas valeur propre donc $m \neq 0$).

7.6 Comme on a vu que les fonctions f_m étaient vecteurs propres, on a déterminé ainsi toutes les valeurs propres.

$$sp(\Psi) = \left\{ \frac{1}{m^2\pi^2 + 1} / m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Les espaces propres sont des droites vectorielles de vecteur directeur les fonctions f_m .

Partie 4 : Calcul de la norme de l'endomorphisme Ψ .

1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\|f_m\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $h_m = \sqrt{2}f_m$.
2. La question 2 de la partie précédente donne :

2.1

$$\forall f \in E, \quad \Psi(f) = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(f_m|f)}{m^2\pi^2 + 1} f_m.$$

$$\forall f \in E, \quad \Psi(f) = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(h_m/\sqrt{2}|f)}{m^2\pi^2 + 1} h_m/\sqrt{2}.$$

$$\forall f \in E, \quad \Psi(f) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(h_m|f)}{m^2\pi^2 + 1} h_m.$$

- 2.2 Soit pour $f \in E$, F la fonction impaire, 2-périodique égale à f sur $]0, 1[$ et telle que $F(1) = 0$. Comme dans l'étude faite pour la fonction u la relation de Parseval appliquée à F donne :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} (h_m|f)^2.$$

3. En utilisant la formule de 2.1 et avec les raisonnements vus précédemment, pour tout entier p :

$$(\Psi(f)|h_p) = \frac{(h_p|f)}{p^2\pi^2 + 1} (h_p|h_p) = \frac{(h_p|f)}{p^2\pi^2 + 1}.$$

En appliquant la formule précédente à $\Psi(f)$:

$$\forall f \in E, \quad \|\Psi(f)\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(h_m|f)^2}{(m^2\pi^2 + 1)^2} \leq \frac{\sum_{m=1}^{+\infty} (h_m|f)^2}{(\pi^2 + 1)^2} = \frac{\|f\|^2}{(\pi^2 + 1)^2}.$$

4. Soit $K = \frac{1}{\pi^2 + 1}$.

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \|\Psi(f) - \Psi(g)\| = \|\Psi(f - g)\| \leq K\|f - g\|.$$

L'application est lipchitzienne donc Ψ est un endomorphisme continu de $(E, \|\cdot\|)$.

5. Pour tout f de norme 1, $\|\Psi(f)\| \leq \frac{1}{\pi^2 + 1}$

$$\text{Mais } h_1 \text{ est de norme 1 et } \Psi(h_1) = \frac{h_1}{\pi^2 + 1}$$

$$\text{Donc : } \sup_{\|f\|=1} \|\Psi(f)\| = \frac{1}{\pi^2 + 1}.$$

Fin du problème.