

CCP Maths 1



Calcul d'une intégrale double, Équation différentielle et
Transformation d'Abel



Corrigé

Exercice 1.

En effectuant le changement de variable $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, on obtient

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \frac{r}{1+r^2} dr d\theta \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr \right) d\theta = \pi \ln 2$$

Exercice 2.

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue ne s'annule pas sur l'intervalle I , donc l'équation différentielle (E) est équivalente à l'équation différentielle $y'' + \frac{a(x)}{x^2}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0$ sur I qui est bien une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continues, il vient que $\dim S^+ = 2$.

Avec un même raisonnement on a ; $\dim S^- = 2$.

2. Soit $f \in \ker \varphi$; nous avons $f_I = 0$ et $f_J = 0$, et par continuité de f en 0, on a aussi $f(0) = 0$, ceci montre que $f = 0$ sur \mathbb{R} ; d'où $\ker \varphi = \{0\}$, et par le théorème du rang appliqué à φ , on a $\dim S = \dim \ker \varphi + \text{rg } \varphi = \text{rg } \varphi \leq \dim(S^+ \times S^-) = 4$.

3. Sur I : soit g une solution de (E) sur I , nous avons $(g')' + \frac{1}{x}(g') = 0$, ainsi g' est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{x}y = 0$ sur I , dont les solutions sur l'intervalle I sont de la forme $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ $g'(x) = \frac{\lambda}{x}$, donc g est de la forme $x \mapsto \lambda \ln x + \beta$ où $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. on en déduit que $S^+ = \text{Vect}\{x \mapsto 1, x \mapsto \ln x\}$ et $\dim S^+ = 2$.

Sur J : avec un même raisonnement on obtient $S^- = \text{Vect}\{x \mapsto 1, x \mapsto \ln(-x)\}$.

Détermination de S : Soit $f \in S$, notons f_I (resp. f_J) la restriction de f à I (resp. à J), on a $f_I \in S^+$ et $f_J \in S^-$, ils existent $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in I$ $f(x) = f_I(x) = \alpha + \beta \ln x$ et pour tout $x \in J$ $f_J(x) = f(x) = \alpha' + \beta' \ln(-x)$, comme la fonction f est continue en 0, alors les deux fonctions f_I et f_J admettent des limites finies respectivement à droite et à gauche en 0, ce qui montre que $\beta = \beta' = 0$, il vient alors que la fonction f est constante sur chacun des intervalle I et J et puisque f est continue sur \mathbb{R} alors f est constante sur \mathbb{R} à savoir $\alpha = \alpha'$.

Conclusion $S = \text{Vect}\{x \mapsto 1\}$, et $\dim S = 1$.

4. Si $x \mapsto x^\alpha$ est solution de (E) sur I , on remplace dans (E) on obtient $\alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0$, on a alors deux valeurs possibles pour α ; $\alpha = 3$ ou $\alpha = 4$, et les deux applications $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto x^3$ sont bien des solutions de (E) sur I , comme ces deux fonctions sont linéairement indépendantes, donc ils forment une base de S^+ et on a $S^+ = \text{Vect}\{x \mapsto x^3, x \mapsto x^4\}$.

On vérifie aussi que les deux fonctions définies sur J par $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto x^3$ sont des solutions de (E) sur J , ces deux fonctions forme un système libre donc une base de S^- ; d'où $S^- = \text{Vect}\{x \mapsto x^3, x \mapsto x^4\}$.

Exercice 2. suite

test

5. On peut démontrer que dans cet exemple, l'application φ définie à la question 2. est un isomorphisme ; en effet si $(f_1, f_2) \in S^+ \times S^-$, notons f l'application définie sur \mathbb{R} par : $f/I = f_1$ et $f/J = f_2$ et $f(0) = 0$, par définition de f ils existent $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^4$ et pour tout $x \leq 0$ $f(x) = \alpha' x^3 + \beta' x^4$, f est deux fois dérivable et vérifie l'équation différentielle (E) sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que φ est surjective.

$$\text{On en déduit que } S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ \alpha' x^3 + \beta' x^4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} / \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim S^+ = \dim S^- = 2 \text{ et } \dim S = 4.$$

6. On considère l'équation différentielle $x^2 y'' + 8xy' + 12y = 0$.

Sur I les solutions sont de la forme $x \mapsto \frac{\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^4}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et

sur J les solutions sont de la forme $x \mapsto \frac{\alpha'}{x^3} + \frac{\beta'}{x^4}$, si f est solution de cette équation différentielle sur \mathbb{R} , alors ils existent $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^4}$ et pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{\alpha'}{x^3} + \frac{\beta'}{x^4}$, puisque f continue en 0 donc, admet une limite finie en 0^+ et en 0^- , ce qui montre que $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, ainsi f est la fonction nulle.

Conclusion : $S = \{0\}$.

PROBLÈME

Première partie :

Convergence de séries par transformations d'Abel

1.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k + a_n B_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \end{aligned}$$

Au passage on a utilisé l'égalité $B_0 = b_0$

2. 2.1 $\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_0$, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge.

- 2.2 La suite $(a_n)_n$ étant décroissante, donc pour tout $k \geq 0$; $a_k - a_{k+1} \geq 0$, puisque $(B_n)_n$ est bornée alors $(a_n - a_{n+1})B_n = O(a_n - a_{n+1})$, maintenant la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})$ permet

de conclure que la série $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument, et en particulier elle est convergente, d'autre part la suite $(a_n B_n)_n$ converge de limite nulle ($(B_n)_n$ bornée et $(a_n)_n$ tend vers 0), en déduit alors que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Remarque : on a aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})B_n$

2.3 Énoncé : Si $(a_n)_n$ est une suite décroissante de limite nulle, alors la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|\sum_{k=0}^n (-1)^k = \pm 1| \leq 1$, et $(a_n)_n$ décroissante de limite nulle ; d'après le résultat de la question précédente ; la série en question converge.

3. 3.1 $e^{i\theta} \neq 1$ puisque $\theta \neq 0[2\pi]$.

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{i\theta} \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}} (e^{i\frac{n\theta}{2}} - e^{-i\frac{n\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

3.2

Cas $\alpha > 0$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ et d'autre part la suite de terme générale $\frac{1}{n}$ ($n > 0$) décroît vers 0, d'après le résultat de la question 2.2 la série en question converge.

Cas $\alpha \leq 0$: on a $|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}| = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la suite de terme générale $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, dans ce cas il y a divergence grossière ; on en déduit que la série diverge dans ce cas.

3.3 Si $x \neq 2k\pi$: Par application du résultat de la question précédente (avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\theta = x$) la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$

converge, en passant à la partie imaginaire de la série, il vient que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge.

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors pour tout $n \geq 1$; $u_n(x) = 0$ et donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge.

Deuxième partie : Convergence uniforme de séries

4. 4.1 Pour tout $z \in A$; $|a_n F_n(z)| \leq a_n M$, donc $\sup_{z \in A} |a_n F_n(z)| \leq a_n M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui montre la convergence uniforme sur A .

pour tout $n \in A$; $(a_n - a_{n+1})F_n(z) \leq (a_n - a_{n+1})M$, et la convergence de la série $\sum_{(a_n - a_{n+1})}$ permet de conclure.

4.2 On a $\sum_{k=0}^n a_n f_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_n - a_{n+1})F_n + a_n F_n$ "Transformation d'Abel", puisque les deux suites de fonctions $(a_n F_n)_n$ et $((a_n - a_{n+1})F_n)_n$ convergent uniformément sur A alors leurs somme est une suite uniformément convergente sur A .

5. 5.1 Pour $x \in \mathbb{R}$; $1 - e^{ix} = (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})e^{i\frac{x}{2}} = -2i \sin(\frac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}$.

Soit $a \in]0, \pi[$, on va appliquer le résultat de la question précédente avec $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et f_n la suite de fonction définie sur $[a, 2\pi - a]$ par $f_n(x) = \sin(xn)$, pour cela il suffit de démontrer que que la suite de fonctions de terme générale $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ est uniformément bornée sur $[a, 2\pi - a]$: pour tout $x \in [a, 2\pi - a]$, on a

$|F_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$, mais pour $x \in [a, 2\pi - a]$, on a $x \in [\frac{a}{2}, \pi - \frac{a}{2}]$, et donc $0 < \sin \frac{a}{2} \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1$, ce qui montre que $|F_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{a}{2}}$. D'où le résultat.

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme $[a, 2\pi - a]$ ($a \in]0, \pi[$), donc sa somme U est continue sur tout intervalle de la forme $[a, 2\pi - a]$ ($a \in]0, \pi[$), c'est bien que la fonction U est continue sur $\cup_{a \in]0, \pi[} [a, 2\pi - a] =]0, \pi[$.

5.2 Pour $x \in]0, \pi[$, on a $|\sum_{k=1}^n \sin(kx) \sin(px)| \leq \frac{|\sin(px)|}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{\sin(px)\pi}{x} \leq \frac{px\pi}{x} = p\pi$.

Si $x = 0$, on a aussi $|\sum_{k=1}^n \sin(kx) \sin(px)| = 0 \leq p\pi$.

En appliquant ce qui précède la série converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.

6. 6.1 La fonction U étant impaire, donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p(U) = 0$.

Toujours avec raison de parité de U , pour tout $p \in \mathbb{N}$; $b_p(U) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(px)U(x)dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)dx$,

la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur le compact $[0, \pi]$, ce qui permet d'intervertir la somme et l'intégrale, il vient que $b_p(U) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\pi \sin(px) \sin(nx)dx = \frac{1}{\sqrt{p}}$.

6.2 Sous l'hypothèse que U est continue par morceaux sur \mathbb{R} donc aussi sur le segment $[0, 2\pi]$, la formule de Parseval, s'écrit

$$\frac{a_0(U)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(U)^2 + b_n(U)^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x)^2 dx$$

Ce qui implique que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}})^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ converge, qui est une contradiction. D'où le résultat.

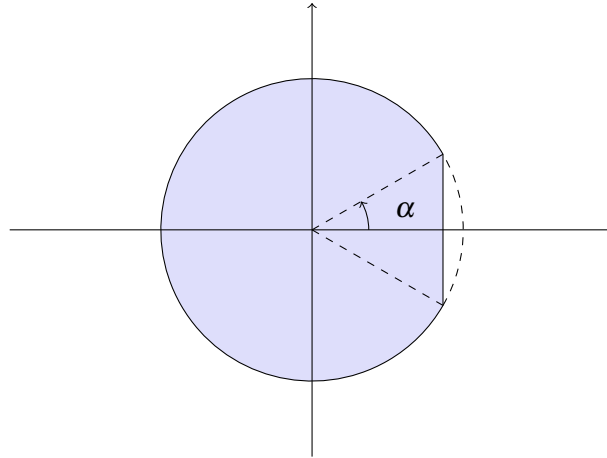
Troisième partie : Convergence uniforme d'une série entière

7. La série $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.

8. 8.1 Supposons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $] -1, 1[$, donc la suite des sommes partielles associées est uniformément bornée sur $] -1, 1[$, c'est-à-dire il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] -1, 1[$; $|\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{\sqrt{k}}| \leq M$, en passant à la limite lorsque x tend vers 1, on obtient, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$; $|\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}| \leq M$, ce qui n'est pas le cas, car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

8.2



- 8.3 On muni \mathbb{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_2$ (en dimension finie toutes les normes sont équivalentes), l'ensemble D_α est l'intersection des deux fermés suivants : Le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 "pour la norme $\|\cdot\|_2$ " et $p_1^{-1}(]-\infty, \cos \alpha])$ où p_1 est la première projection qui est une application continue ($p_1(x, y) = x$).
 Remarque : l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.
 Pour tout $(x, y) \in D_\alpha$; $\|(x, y)\|_2 \leq 1$, donc D_α est borné.
 D_α fermé borné, donc compact (dimension finie).

- 8.4 Pour $z \in D_\alpha$, on a $z \neq 1 \notin D_\alpha$, donc $|F_n(z)| = \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{2}{|1 - z|}$, d'autre part $0 < 1 - \cos \alpha \leq 1 - x = \operatorname{Re}(1 - z) \leq |1 - z|$, donc $F_n(z) \leq \frac{2}{|1 - z|} \leq \frac{2}{1 - x} \leq \frac{2}{1 - \cos \alpha}$.

- 8.5 D'après le résultat de la question précédente, pour tout $z \in D_\alpha$, $|F_n(z)| \leq \frac{2}{1 - \cos \alpha}$, c'est-à-dire la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^n z^k)_n$ est uniformément bornée sur D_α , et comme la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})_n$ est décroissante vers 0, d'après le résultat de la question 5.1 la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur D_α .

