

Théorème de la limite centrale un corrigé

1 Préliminaires.

Q.1. On peut traiter simultanément les deux premiers points avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Soient $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty f(t) = \phi(t)$. ϕ est indépendante de x et c'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est positive et son intégrale existe et vaut $\|g\|_\infty$ puisque $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$).

Le théorème s'applique et indique que pour tout $x, t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et est donc a fortiori d'intégrale convergente) et $f * g$ est continue.

$$f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Le changement de variable $u = x - t$ montre que

$$f * g(x) = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u) du = g * f(x)$$

Q.2. Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$ ou $-\infty$. Posons $u_n = f * g(x_n)$; en notant $h_n : t \mapsto f(t)g(x_n - t)$, on a

$$u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt$$

Montrons que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

- Pour tout n , h_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle (car f est bornée et g de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$). La limite simple est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|h_n(t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$. Le majorant est indépendant de n et est intégrable sur $\mathbb{R}$ (comme en question 1).

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f * g(x_n) = 0$$

Par caractérisation séquentielle des limites, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f * g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g * f(x) = 0$$

Q.3. Soient $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. g est bornée sur $\mathbb{R}$ et on peut ainsi reprendre la question 1 pour voir que

$f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$

f et g étant positives, on a immédiatement

$f * g$ est positive sur $\mathbb{R}$

On a aussi $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f * g(x) \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \|g\|_\infty$ et donc $f * g$ est bornée sur $\mathbb{R}$

Il nous reste à montrer que $f * g$ a une intégrale sur $\mathbb{R}$ qui converge et qui vaut 1. Pour cela, et comme l'énoncé nous le propose, on va utiliser le théorème de Fubini avec $F : (x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$ qui est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux à partir des continuités de f et de g) en vérifiant uniquement deux des hypothèses.

1) Pour tout réel $x, |F(x, t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$ et comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (positive d'intégrale convergente), $t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $t, |F(x, t)| \leq \|f\|_\infty g(x-t)$. Le changement de variable $u = x - t$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) du = 1$ et donc $x \mapsto g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (positive d'intégrale convergente), $x \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout réel t (avec la positivité de F et avec le changement de variable évoqué dans le premier point)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, t)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dx = f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) dx = f(t)$$

$t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x, t)| dx$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et son intégrale vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.
Le théorème de Fubini s'applique et donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dt \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) dx \right) dt = 1$$

On a ainsi le dernier point attendu et

$$f * g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

2 Une classe d'opérateurs sur $C_0(\mathbb{R})$.

Q.4. Soit $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$;

$$\forall x \in \mathbb{R}, |T_f(u)(x)| = |f * u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|u\|_{\infty} f(t) dt = \|u\|_{\infty}$$

Le majorant est indépendant de x et un passage à la borne supérieure donne

$$\|T_f(u)\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty}$$

Q.5. Soient $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$; avec la commutativité et l'associativité de $*$, on a

$$T_f T_g(u) = f * T_g(u) = f * (g * u) = (g * u) * f = g * (u * f) = g * (f * u) = T_g T_f(u)$$

Q.6. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$; on a (avec la question précédente pour la seconde relation)

$$\begin{aligned} T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{f_1} T_{g_2}(u) &= T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) \\ T_{f_1} T_{g_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u) &= T_{g_2} T_{f_1}(u) - T_{g_2} T_{g_1}(u) = T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)) \end{aligned}$$

On passe à la norme infinie, on utilise la question 4, puis on somme et on utilise l'inégalité triangulaire pour obtenir

$$\begin{aligned} \|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_{\infty} &\leq \|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{f_1} T_{g_2}(u)\|_{\infty} + \|T_{f_1} T_{g_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_{\infty} \\ &\leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_{\infty} + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_{\infty} \end{aligned}$$

Q.7. On remarque tout d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (T_f)^n(u) = f * f * \dots * f * u = f^{*n} * u = T_{f^{*n}}(u)$$

On prouve alors le résultat annoncé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : le résultat est immédiat pour $n = 1$ (on a même une égalité).
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat est vrai au rang n . La question précédente donne (avec $f_1 = f$, $f_2 = f^{*n}$, $g_1 = g$ et $g_2 = g^{*n}$)

$$\|(T_f)^{n+1}(u) - (T_g)^{n+1}(u)\|_{\infty} \leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty} + \|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_{\infty} \leq (n+1)\|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty}$$

On conclut que le résultat est vrai au rang $n + 1$.

3 Lois normales.

Q.8. g_h est continue positive et bornée (majorée par $\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$). C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (seuls problèmes aux voisinages des infinis où g_h est négligeable devant $1/x^2$ par croissances comparées). De plus, le changement de variable $u = \frac{x}{h}$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u) du = 1$$

On en déduit que

$$\forall h > 0, g_h \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

$x \mapsto xg_h(x)$ et $x \mapsto x^2g_h(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (seuls problèmes aux voisinages des infinis où les fonctions sont négligeables devant $1/x^2$ par croissances comparées). Les intégrales proposées existent donc. On a directement, par imparité de la fonction (et sachant que l'intégrale existe)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xg_h(x) dx = 0$$

Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\int_a^b x^2g_h(x) dx = \left[-\frac{hx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \right]_a^b + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2h^2}} dx = \left[-\frac{hx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \right]_a^b + h^2 \int_a^b g_h(x) dx$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ (les intégrales existent) on a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g_h(x) dx = h^2$$

Q.9. Comme on l'a remarqué en question 7,

$$\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}} \right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}}$$

Par ailleurs, on a (récurrence quasi immédiate avec le résultat admis par l'énoncé)

$$g_{h_1} * g_{h_2} * \cdots * g_{h_n} = g_h \quad \text{avec} \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$$

et en particulier $(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n} = g_h$ ce qui donne

$$\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}} \right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}} = T_{g_h}$$

4 Convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q.10. Montrons par récurrence sur k que la propriété

$$\exists P_{k,h}, \text{ polynôme de degré } k, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^k}{dx^k} g_h(x) = P_{k,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : le résultat est vrai au rang 0 avec $P_{0,h} = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$ qui est un polynôme constant non nul et donc de degré 0.

- Hérédité : supposons le résultat acquis à un rang $k - 1 \geq 0$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{d^k}{dx^k} g_h(x) = (P'_{k-1,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k-1,h}(x)) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

Posons $P_{k,h}(x) = P'_{k-1,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k-1,h}(x)$. C'est un polynôme de degré k (somme d'un polynôme de degré k et d'un de degré $\leq k - 1$) qui vérifie la propriété voulue.

Q.11. La fonction $s_{k,h} : u \mapsto P_{k,h}(u) e^{-\frac{u^2}{4h^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle aux infinis (croissances comparées). C'est donc une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. On a alors,

$$\forall x, t \in \mathbb{R}, \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \|s_{k,h}\|_{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$$

On suppose désormais que $|x| \leq a$. Par seconde forme de l'inégalité triangulaire indique que $|x-t| \geq |t| - |x| \geq |t| - a$. Si $|t| \geq a$, ces termes sont positifs et par croissance de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}^+$ on a donc $(x-t)^2 \geq (|t| - a)^2$. On en déduit que pour $|t| \geq a$, $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}}$. Par ailleurs, pour $|t| < a$, on a $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq 1$. Posons donc

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \|s_{k,h}\|_{\infty} & \text{si } |t| < a \\ \|s_{k,h}\|_{\infty} e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient une fonction continue par morceaux, négligeable devant $1/t^2$ aux voisinages des infinis et donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall x \in [-a, a], \forall t \in \mathbb{R}, \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \phi_k(t)$$

ϕ_k ne dépend effectivement que de h , k et a .

Q.12. Soit $h > 0$ et soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. On veut appliquer le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- Pour tout réel x , $t \mapsto g_h(x-t)u(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cela a été prouvé en question 1).
- Pour tout réel t , $x \mapsto g_h(x-t)u(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée k -ième est la fonction $x \mapsto P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} u(t)$.
- Pour tout segment $[-a, a]$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la question 11 donne une domination de la dérivée k -ième précédente par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et cette domination est uniforme vis à vis de $x \in [-a, a]$.

$T_{g_h}(u)$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a, a]$ pour tout a et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{d^k}{dx^k} T_{g_h}(u) : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} u(t) dt$$

Q.13. Soit $f_{k,h} : u \mapsto P_{k,h}(u) e^{-\frac{u^2}{2h^2}}$. Les fonctions $f_{k,h}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (continues et dominées par $1/u^2$ au voisinage des infinis). Comme en questions 1 et 2, on peut écrire (l'hypothèse $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ peut être remplacée par l'intégrabilité de f et les quantités écrites continuent à exister et à vérifier les propriétés des questions 1 et 2).

$$\frac{d^k}{dx^k} T_{g_h}(u)(x) = f_{k,h} * u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

On a donc montré que

$$T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Q.14. Soit $\alpha > 0$. Si $t \geq \alpha$ alors $t^2 \geq t\alpha$ et donc

$$\forall x \geq \alpha, \quad 0 \leq g_h(t) \leq \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha t}{2h^2}}$$

Les fonctions considérées étant intégrables au voisinage de $+\infty$, on peut intégrer les inégalités précédentes et on obtient

$$0 \leq \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt \leq \left[-\frac{2h^2}{\alpha h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha t}{2h^2}} \right]_{\alpha}^{+\infty} = \frac{2h}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2h^2}} \leq \frac{2h}{\alpha\sqrt{2\pi}}$$

Par théorème d'encadrement, on a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt = 0$$

La fonction g_h étant paire, on en déduit aussi que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt = 0$$

Q.15. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. On va prouver le résultat demandé en revenant à la définition des limites. On se donne donc $\varepsilon > 0$. La propriété admise nous donne $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La question précédente (α est maintenant connu et fixé) donne $r > 0$ tel que

$$\forall h \in]0, r], \quad 0 \leq \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{8\|u\|_{\infty}} \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{8\|u\|_{\infty}}$$

Soit $h \in]0, r]$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On a (g_h étant d'intégrale égale à 1)

$$T_{g_h}(u)(x) - u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)(u(x-t) - u(x)) dt$$

On passe au module, on majore par positivité de l'intégrale et on utilise la relation de Chasles pour obtenir (en majorant grossièrement $|u(x-t) - u(x)|$ par $2\|u\|_{\infty}$)

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)|u(x-t) - u(x)| dt + 2\|u\|_{\infty} \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt + \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt \right)$$

On en déduit alors que

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Le majorant étant indépendant de x , on a $\|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} \leq \varepsilon$. On a prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0 / \forall h \in]0, r], \quad \|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

c'est à dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_{\infty} = 0$$

Q.16. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. Ecrivons que, pour tout $h > 0$.

$$T_{f_n}(u) - T_f(u) = (T_{f_n}(u) - T_{f_n}T_{g_h}(u)) + (T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)) + (T_fT_{g_h}(u) - T_f(u))$$

On passe à la norme infinie et on utilise l'inégalité triangulaire et la question 4 pour obtenir

$$\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \leq \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty + \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty + \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty$$

On revient à la définition des limites pour répondre à la question posée. Soit $\varepsilon > 0$; la question précédente nous permet de trouver un $h > 0$ tel que $\|u - T_{g_h}(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. h étant fixé, $T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et l'hypothèse faite donne un n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $\|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On a ainsi

$$\forall n \geq n_0, \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \leq \varepsilon$$

et on a prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$$

Ceci étant vrai pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$,

(f_n) converge faiblement vers f

Q.17. $x \in \mathbb{R}$ est ici fixé. D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$u(x-t) = u(x) - tu'(x) + \frac{t^2}{2}u''(x) + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$$

et ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} = \frac{u''(x)}{2}$$

Comme f_n est d'intégrale égale à 1, on a

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) = n \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)(u(x-t) - u(x)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t) - u(x)}{t^2} dt \quad (1)$$

Comme $f_n^\#$ est d'intégrale égale à 1 on a aussi

$$-\frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u''(x)}{2} f_n^\#(t) dt \quad (2)$$

Enfin, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = 0$, on a aussi (poser $v = \frac{t}{\sqrt{n}}$) $\int_{-\infty}^{+\infty} v f_n(v) dv = 0$ et donc

$$0 = n\sqrt{n}u'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x)}{t} f_n^\#(t) dt \quad (3)$$

En sommant les relations (1), (2) et (3), on obtient

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x) \right) f_n^\#(t) dt$$

Q.18. Soit $\alpha > 0$ quelconque. On a (en posant $v = \sqrt{nt}$)

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t) dt = \int_{\alpha}^{+\infty} nt^2 \sqrt{n} f(\sqrt{nt}) dt = \int_{\sqrt{n}\alpha}^{+\infty} v^2 f(v) dv$$

Comme l'intégrale de $v \mapsto v^2 f(v)$ existe sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t) dt = 0 \quad (4)$$

et de façon similaire,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t) dt = 0 \quad (5)$$

Posons maintenant $g(x, t) = \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne (u^3 est bornée puisque continue et de limite nulle aux infinis)

$$|u(x-t) - u(x) - tu'(x) - \frac{t^2}{2}u''(x)| \leq \frac{|t|^3}{6} \|u^{(3)}\|_\infty$$

et on a donc

$$|g(x, t)| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} |t|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors, avec la relation précédente (et puisque $f_n^\#$ est positive et d'intégrale égale à 1)

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(x, t) f_n^\#(t) dt \right| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |t| f_n^\#(t) dt \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \varepsilon$$

Les relations (4) et (5) avec $\alpha = \varepsilon$ donnent un rang n_0 à partir duquel les intégrales sont inférieures ou égales à ε^3 . De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall |t| \geq \varepsilon, |g(x, t)| \leq \frac{1}{2} \|u''\|_\infty + \frac{2\|u\|_\infty}{\varepsilon^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\varepsilon}$$

et on a donc, pour $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x, t) f_n^\#(t) dt \right| &\leq \left(\frac{1}{2} \|u''\|_\infty + \frac{2\|u\|_\infty}{\varepsilon^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\varepsilon} \right) \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n^\#(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon^3}{2} \|u''\|_\infty + 2\|u\|_\infty \varepsilon + \|u'\|_\infty \varepsilon^2 \end{aligned}$$

On procède de même avec l'intégrale entre $-\infty$ et $-\alpha$. On a alors

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, t) f_n^\#(t) dt \right| \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \varepsilon + \varepsilon^3 \|u''\|_\infty + 4\|u\|_\infty \varepsilon + 2\|u'\|_\infty \varepsilon^2$$

Le majorant est indépendant de x et on peut passer à la borne supérieure. Compte-tenu de la question précédente, on a

$$\forall n \geq n_0, \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_\infty \leq \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6} \varepsilon + \varepsilon^3 \|u''\|_\infty + 4\|u\|_\infty \varepsilon + 2\|u'\|_\infty \varepsilon^2$$

le majorant est de limite nulle quand ε tend vers 0 et on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_\infty = 0$$

Q.19. Avec les questions 9 puis 7, on a

$$\|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1/\sqrt{n}}^n(u)\|_\infty \leq n \|T_{f_n}(u) - T_{g_1/\sqrt{n}}(u)\|_\infty$$

On écrit alors que $n(T_{f_n}(u) - T_{g_1/\sqrt{n}}(u)) = A_n - B_n$ avec

$$A_n = n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \quad \text{et} \quad B_n = n(T_{g_1/\sqrt{n}}(u) - u) - \frac{1}{2}u''$$

La question précédente donne $\|A_n\|_\infty \rightarrow 0$ mais aussi $\|B_n\|_\infty \rightarrow 0$ car c'est un cas particulier en choisissant $f = g_1$ (qui vérifie les bonnes hypothèses). On en déduit que $\|A_n - B_n\|_\infty \rightarrow 0$, ce qu'il fallait prouver :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$$

Comme $T_{f_n}^n(u) = T_{f_n^{*n}}(u)$, on se retrouve exactement dans le cadre de la question 16 pour conclure que (f_n^{*n}) converge faiblement vers g_1 .