

Partie I: développement limité d'une intégrale $f : x \mapsto x \cdot \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$

I.A.1) → Pour que la fonction f soit définie, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$ existe.

Comme 0 est une borne de cette intégrale, \mathcal{D}_f doit être un intervalle qui contient 0.

→ La fonction $g : x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$ est continue sur $] -1, +\infty[$.

$\forall x \in] -1, +\infty[$, $\int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$ est une intégrale définie. Donc $] -1, +\infty[\subset \mathcal{D}_f$.

→ $\int_0^{-1} \frac{e^t}{1+t} dt$ est impropre en -1 et est divergente.

En effet: $\forall t \in] -1, 0[$, $\frac{1}{e} \times \frac{1}{1+t} \leq g(t) \leq \frac{1}{1+t}$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$.

Par suite: $-1 \notin \mathcal{D}_f$.

Enfin: $\mathcal{D}_f =] -1, +\infty[$.

I.A.2) → On note G la primitive de g sur $] -1, +\infty[$ qui s'annule en 0.

Comme g est strictement positive sur $] -1, +\infty[$, G est strictement croissante et, par suite, G est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* et est strictement négative sur $] -1, 0[$.

→ Par définition: $\forall x \in] -1, +\infty[$, $f(x) = x \cdot G(x)$ donc: $\forall x \in] -1, +\infty[$, $f'(x) = G(x) + x \cdot g(x)$.

• Si $x \in] -1, 0[$ alors $G(x) < 0$ et $x \cdot g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$.

• Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $G(x) > 0$ et $x \cdot g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$.

f est strictement décroissante sur $] -1, 0[$ et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Note: Comme $f(0) = 0$, f est positive sur \mathcal{D}_f et ne s'annule qu'en 0.

I.A.3) → $\forall x \in] -1, 0[$, $\forall t \in [x, 0]$, $e^x \times \frac{1}{1+t} \leq g(t) \leq \frac{1}{1+t}$

Par suite: $\forall x \in] -1, 0[$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq G(x) \leq e^x \int_0^x \frac{dt}{1+t}$

et: $\forall x \in] -1, 0[$, $x \cdot e^x \cdot \ln(1+x) \leq f(x) \leq \ln(1+x)$.

→ $\lim_{x \rightarrow -1^+} x \cdot e^x \cdot \ln(1+x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

I.A.4) → $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(t) \geq \frac{1}{1+t}$ donc $G(x) \geq \ln(1+x)$. Par suite: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq x \cdot \ln(1+x)$.

→ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln(1+x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

→ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(x)}{x} \geq \ln(1+x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, la courbe de f présente une branche parabolique de direction (Oy) .

I.B) $n \in \mathbf{N}^*$, $k \in \mathbf{Z}$, $k > -n$ et $x_k = \frac{k}{n}$.

I.B.1) Si $k \in \mathbf{N}^*$ alors on peut utiliser l'approximation de $G(x_k)$ par la méthode des trapèzes.

On partage le segment $[0, x_k]$ en k intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$ et on approche $G(x_k)$ par la somme des aires des trapèzes définies par la courbe d'équation $y = g(x)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{i}{n}$.

On rappelle que les valeurs extrêmes de la subdivision n'interviennent que dans l'aire d'un seul trapèze alors que les valeurs intermédiaires interviennent dans l'aire de deux trapèzes.

$$\text{Il vient: } G(x_k) \approx \frac{1}{2n} \left[g(0) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} g\left(\frac{i}{n}\right) + g(x_k) \right] = \frac{1}{2n} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{i/n}}{1+i/n} + \frac{e^{k/n}}{1+k/n} \right]$$

$$\text{d'où: } G(x_k) \approx \frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{i/n}}{n+i} + \frac{e^{k/n}}{2(n+k)}$$

$$\text{et, par suite: } \boxed{f(x_k) = x_k \cdot G(x_k) \approx \frac{k}{n} \left(\frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{i/n}}{n+i} + \frac{e^{k/n}}{2(n+k)} \right) = y_k}$$

I.B.2) Si $-n < k < 0$, on partage encore le segment $[x_k, 0]$ en k intervalles de même amplitude.

Les points de la subdivisions sont les réels $\frac{i}{n}$ pour i variant de k à 0.

Il faut, de plus tenir compte du fait que les bornes de l'intégrale sont en ordre décroissant.

$$\text{Dans ce cas, } \boxed{f(x_k) \approx -\frac{k}{n} \left(\frac{e^{k/n}}{2(n+k)} + \sum_{i=k+1}^{-1} \frac{e^{i/n}}{n+i} + \frac{1}{2n} \right)}$$

I.B.3) `> T:=array([1-n]..[m]):`

`for k from [1-n] to [m] do T[k]:=evalf(exp(k/4)/(k+4)) od:`

`liste:=[]:`

`for k from -3 to -1`

`do y:=-k*(1/4+T[k]+2*sum(T[i],i=k+1..-1))/8:`

`liste:=[op(liste),y]`

`od:`

`liste:=[op(liste),0]:`

`for k from 1 to 8`

`do y:=k*(1/4+T[k]+2*sum(T[i],i=1..k-1))/8:`

`liste:=[op(liste),y]`

`od:`

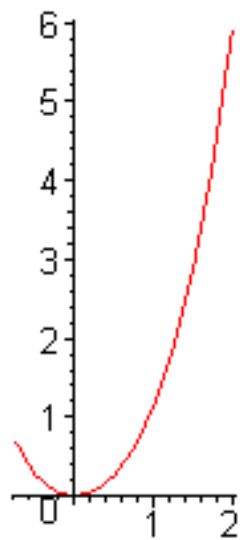
`print(liste):`

On a d'abord calculé dans un tableau les valeurs utiles de la fonction g .

```

I.B.4) > T:=array(-3..8):
for k from -3 to 8 do T[k]:=evalf(exp(k/4)/(k+4)) od:
liste:=[]:
for k from -3 to -1
do y:=-k*(1/4+T[k]+2*sum(T[i],i=k+1..-1))/8:
liste:=[op(liste),[k/4,y]]
od:
liste:=[op(liste),[0,0]]:
for k from 1 to 8
do y:=k*(1/4+T[k]+2*sum(T[i],i=1..k-1))/8:
liste:=[op(liste),[k/4,y]]
od:
plot(liste,style=LINE,scaling=CONSTRAINED);

```



I.C.1) La fonction g est C^∞ sur $] -1, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions C^∞ , le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle.
Par suite, la fonction G est C^∞ sur $] -1, +\infty[$ de même que f .
On en déduit que f admet un développement limité de tout ordre en 0.

Donc il existe une suite réelle $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que: $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k + o(x^n)$.

I.C.2) $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.

Par produit, $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

On en déduit que: $G(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

et que: $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} + o(x^5)$.

I.C.3) On reprend le calcul précédent et on fait apparaître le terme d'ordre $n-2$ dans le développement limité en 0 de la fonction g .

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!} + o(x^{n-2}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k x^k + o(x^{n-2})$$

$$\text{Le terme cherché est } \sum_{p=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-2-p}}{p!} x^{n-2} = \sum_{p=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-p}}{p!} x^{n-2}$$

$$\text{On en déduit que: } \boxed{\forall n \geq 2, \lambda_n = \frac{1}{n-1} \sum_{p=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-p}}{p!}}$$

$$\text{I.C.4) } \forall n \geq 2, \lambda_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+1-p}}{p!} = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{p=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-p}}{p!} \right]$$

$$\forall n \geq 2, \lambda_{n+1} = \frac{1}{n!} - \frac{n-1}{n} \lambda_n$$

Comme $\lambda_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$ et $\lambda_1 = 0$, cette relation est encore vraie pour $n = 1$.

$$\text{Par suite: } \boxed{\forall n \geq 1, \lambda_{n+1} = \frac{1}{n!} - \frac{n-1}{n} \lambda_n}$$

I.C.5) > restart:

a:=0:p:=0:

for i from 1 to $\boxed{n-1}$

do a:=1/i!-(i-1)*a/i:

p:=p+a*x^(i+1)

od:

p;

Pour vérifier la question I.C.2

> restart:

a:=0:p:=0:

for i from 1 to 4

do a:=1/i!-(i-1)*a/i:

p:=p+a*x^(i+1)

od:

p;

$$x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{12}x^5$$

Partie II: une équation différentielle d'ordre 1

(E): $(1+x)y' = xy$ et φ est la solution de (E) sur $] -1, +\infty[$ vérifiant $\varphi(0) = 1$.

II.A.1) Sur $] -1, +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow y' - \frac{x}{1+x}y = 0$ car $1+x \neq 0$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre résolue en y' .

On cherche à résoudre un problème de Cauchy en 0.

On sait qu'un tel problème admet une solution et une seule.

D'où l'existence et l'unicité de φ .

II.A.2) On pose $a(x) = -\frac{x}{1+x} = -\frac{1+x-1}{1+x} = -1 + \frac{1}{1+x}$

$A(x) = -x + \ln(1+x)$ est une primitive de $a(x)$ sur $] -1, +\infty[$.

La solution générale de (E) sur $] -1, +\infty[$ est donc $y = k \frac{e^x}{1+x}$, $k \in \mathbb{R}$.

La condition initiale fournie donne $1 = k$.

Donc $\varphi : \begin{cases}] -1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^x}{1+x} \end{cases}$.

Note: φ est la fonction g définie dans la partie I

II.B.1) On suppose que: $\forall x \in I, \varphi(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

→ Ceci nécessite $I \subset] -1, +\infty[$.

→ Comme $\varphi(0) = 1$, $a_0 = 1$.

→ Comme φ est solution de (E) sur I ,

$$\forall x \in I, (1+x) \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = x \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$\forall x \in I, \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 1} n a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}$$

$$\forall x \in I, \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n \geq 1} n a_n x^n - \sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\forall x \in I, a_1 + \sum_{n \geq 1} [(n+1)a_{n+1} + n a_n - a_{n-1}] x^n = 0.$$

Par suite: $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} + n a_n - a_{n-1} = 0$.

II.B.2) → $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par la donnée de $a_0 = 1$, de $a_1 = 0$

et par la relation de récurrence: $\forall n \geq 2, a_{n+2} = -\frac{n+1}{n+2} a_{n+1} + \frac{1}{n+2} a_n$

et ceci la définit de manière unique.

→ On vérifie par une récurrence à deux prédécesseurs que: $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1$.

• La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

• Si, pour un indice n donné ($n \geq 0$), $|a_n| \leq 1$ et $|a_{n+1}| \leq 1$

alors $|a_{n+2}| \leq \frac{(n+1)|a_{n+1}| + |a_n|}{n+2} \leq \frac{n+1+1}{n+2} = 1$ d'où l'hérédité.

Par suite: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.

II.B.3) Comme la suite $(a_n \times 1^n)$ est bornée, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1 donc il n'est pas nul.

Donc: $\boxed{\varphi \text{ est développable en série entière au voisinage de } 0}$.

II.B.4) \rightarrow Si, pour un réel r avec $|r| > 1$, la série $\sum a_n r^n$ était convergente alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vérifierait $R \geq r$.

La fonction $\psi : x \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ serait de classe C^∞ sur $] -r, r[$

et φ serait sa restriction sur $] -1, 1[$.

Ceci est impossible car φ n'est pas prolongeable par continuité en -1

vu que $\lim_{x \rightarrow -1^+} \varphi(x) = +\infty$.

\rightarrow D'après ce qui précède: $\forall r > 1, R \leq r$. On en déduit que: $R \leq 1$.

Comme on a déjà montré que $R \geq 1$, on en déduit: $\boxed{R = 1}$.

II.C.1) On pose: $\forall n \geq 1, b_n = a_n + a_{n-1}$.

\rightarrow La relation $\forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} + n.a_n - a_{n-1} = 0$ peut s'écrire: $\forall n \geq 1, (n+1)(a_{n+1} + a_n) = a_n + a_{n-1}$

ce qui se traduit par: $\boxed{\forall n \geq 1, (n+1)b_{n+1} = b_n}$.

$\rightarrow b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}, b_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$.

Une récurrence immédiate donne: $\boxed{\forall n \geq 1, b_n = \frac{1}{n!}}$.

II.C.2) $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n (-1)^k . b_k = \sum_{k=1}^n (-1)^k . a_k + \sum_{k=1}^n (-1)^k . a_{k-1} = \sum_{k=1}^n (-1)^k . a_k - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k . a_k = (-1)^n . a_n - 1$

$\forall n \geq 1, (-1)^n . a_n = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k . b_k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ donc $\boxed{\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!}}$.

II.C.3) $\forall n \geq 2, \lambda_n = \frac{1}{n-1} \sum_{p=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-p}}{p!} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-2-k}}{k!}$. Donc $\boxed{\forall n \geq 2, \lambda_n = \frac{a_{n-2}}{n-1}}$.

II.D.1) > restart:

n := \boxed{n} : x := $\boxed{u0}$: y := $\boxed{u1}$:

```

if n=0
  then print(x)
  elif n=1
    then print(y)
  else for i from 2 to n
        do z := (x - (i-1)*y) / i :
          x := y : y := z
        od :
    print(z)
fi :
```

II.D.2) On vérifie que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

→ Par définition $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

→ La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E donc $E \neq \emptyset$.

→ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E, \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} (n+1)u_{n+1} + nu_n - u_{n-1} = 0 \\ (n+1)v_{n+1} + nv_n - v_{n-1} = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Par suite } (n+1)(\lambda u + v)_{n+1} + n(\lambda u + v)_n - (\lambda u + v)_{n-1} \\ = (n+1)(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + n(\lambda u_n + v_n) - (\lambda u_{n-1} + v_{n-1}) \\ = \lambda[(n+1)u_{n+1} + nu_n - u_{n-1}] + [(n+1)v_{n+1} + nv_n - v_{n-1}] \\ = \lambda \times 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda u + v \in E$.

On a montré que: $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

II.D.3) Soit $\phi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$

→ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E, \phi(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1) = \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1)$
 $\phi(\lambda u + v) = \lambda\phi(u) + \phi(v)$ donc $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^2)$.

→ Si $\phi(u) = (0, 0)$ alors $u_0 = u_1 = 0$

et une récurrence immédiate donne: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$.

Par suite, u est la suite nulle.

Donc $\text{Ker}(\phi) = \{0_E\}$ et, de ce fait, ϕ est injective.

→ ϕ est manifestement surjective car la donnée d'un couple (α, β) quelconque de réels définit une suite de E par: $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)u_{n+1} + nu_n - u_{n-1} = 0$.

On en déduit que ϕ est un isomorphisme de E sur \mathbb{R}^2 .

Par suite, E et \mathbb{R}^2 sont de même dimension donc E est un plan vectoriel.

II.D.4) On cherche les réels q non nuls tels que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)q^{n+1} + nq^n - q^{n-1} = 0$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)q^2 + nq - 1 = 0.$$

$$(1) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, q(q+1)n + (q+1)(q-1) = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow q = -1$$

Les suites géométriques éléments de E forment la droite vectorielle $\text{Vect}(n \longmapsto (-1)^n)$.

II.D.5) → On note a la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et b la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{La famille } (a, b) \text{ est libre car } \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Par ailleurs cette famille est maximale car $\dim(E) = 2$ donc c'est une base de E .

→ Soit u une suite quelconque de E , il existe un unique couple (α, β) de réels tels que: $u = \alpha a + \beta b$ (ce sont les coordonnées de u dans la base (a, b)).

Par suite: $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha a_n + \beta (-1)^n$.

$$\text{Pour } n \in \{0, 1\}, \text{ on obtient: } \begin{cases} u_0 = \alpha + \beta \\ u_1 = -\beta \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \alpha = u_0 + u_1 \\ \beta = -u_1 \end{cases}$$

$$\text{Finalement: } \boxed{\text{si } u \in E \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_0 + u_1) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} - u_1 (-1)^n.}$$

Partie III: une équation différentielle d'ordre 2

$$(\mathcal{E}) \quad x^2(x+1)y'' - x(x^2+2x+2)y' + (x^2+2x+2)y = 0$$

III.A.1) Si P a pour terme dominant ax^n avec $a \neq 0$,

- le terme dominant de $x^2(x+1)P''$ est $n(n-1)ax^{n+1}$,
- le terme dominant de $-x(x^2+2x+2)P'$ est $-nax^{n+2}$,
- et celui de $(x^2+2x+2)P$ est ax^{n+2} .

Pour que P soit solution de (\mathcal{E}) il faut que: $(-n+1)ax^{n+2}$ soit un monôme nul ce qui exige $n = 1$.

Donc si un polynôme P est solution de (\mathcal{E}) alors $d^\circ(P) = 1$.

III.A.2) On cherche deux réels α et β tels que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2(x+1) \times 0 - x(x^2+2x+2)\alpha + (x^2+2x+2)(\alpha x + \beta) = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2+2x+2)\beta = 0$$

$$(2) \Leftrightarrow \beta = 0.$$

Les solutions polynômiales de (\mathcal{E}) forment la droite $\text{Vect}(x \mapsto x) = \text{Vect}(id_{\mathbb{R}})$.

III.B.1) On utilise la méthode de variation de la constante.

On cherche les solutions de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}^* sous la forme $y = \lambda(x).x$

Il vient: $y' = \lambda'(x).x + \lambda(x)$ et $y'' = \lambda''(x).x + 2\lambda'(x)$.

λ vérifie l'équation différentielle

$$(e) \quad x^2(x+1)[\lambda''(x).x + 2\lambda'(x)] - x(x^2+2x+2)[\lambda'(x).x + \lambda(x)] + (x^2+2x+2)[\lambda(x).x] = 0$$

$$(e) \Leftrightarrow x^2(x+1)[\lambda''(x).x + 2\lambda'(x)] - x^2(x^2+2x+2)\lambda'(x) = 0$$

$$(e) \Leftrightarrow (x+1)[\lambda''(x).x + 2\lambda'(x)] - (x^2+2x+2)\lambda'(x) = 0$$

$$(e) \Leftrightarrow x(x+1)\lambda''(x) - x^2\lambda'(x) = 0$$

$$(e) \Leftrightarrow (x+1)z' = xz \text{ en posant } z = \lambda'$$

Donc la résolution de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R}^* se ramène à la résolution de (E).

III.B.2) La solution générale de (E) sur $] -1, +\infty[$ est $z = A \frac{e^x}{1+x}$, $A \in \mathbb{R}$.

$$\text{Donc } \lambda' = A \frac{e^x}{1+x} \text{ et } \lambda = A \left(\int_0^x \frac{e^x}{1+x} dx + B \right).$$

La solution générale de (\mathcal{E}) sur $] -1, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$ a pour expression

$$\boxed{y(x) = A.f(x) + Bx, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2}.$$

III.B.3) Une solution de (E) sur $] -1, +\infty[$ est une fonction h de la forme

$$h: \begin{cases}]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Af(x) + Bx \text{ si } x \in]-1, 0[\\ x \longmapsto Cf(x) + Dx \text{ si } x > 0 \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases} \quad \text{deux fois dérivable en } 0.$$

→ La continuité en 0 est assurée car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

→ La dérivabilité en 0 exige $B = D$ car $f'(0) = 0$.

→ D'après le $DL_2(0)$ de f , pour que h admette un $DL_2(0)$ il faut que $A = C$.
Dans ce cas, $h(x) = Af(x) + Bx$ est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$.

Les solutions de (\mathcal{E}) sur $] -1, +\infty[$ ont pour expression $Af(x) + Bx$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Si $A \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow -1^+} |Af(x) + Bx| = +\infty$.

et on a vu que les fonctions $x \in \mathbb{R} \longmapsto Bx$, $B \in \mathbb{R}$ sont des solutions de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R} .

Les solutions de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R} sont les fonctions linéaires.

III.C.1) D'après la question précédente les solutions de (\mathcal{E}) sur $] -1, +\infty[$ ont pour expression $y(x) = Af(x) + Bx$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Par suite: $\forall (A, B) \in \mathbb{R}^2, y(0) = 0$.

$$\begin{cases} \text{si } \alpha \neq 0 \text{ aucune solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur }]-1, +\infty[\text{ ne vérifie } y(0) = \alpha \\ \text{si } \alpha = 0 \text{ toutes les solutions de } (\mathcal{E}) \text{ sur }]-1, +\infty[\text{ (une infinité) vérifient } y(0) = \alpha \end{cases}$$

III.C.2) Les solutions de (\mathcal{E}) sur $] -1, +\infty[$ admettent pour développement limité d'ordre 2 en 0

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Bx + Ax^2 + o(x^2).$$

Par suite: $y'(0) = B$ et $y''(0) = 2A$.

Les conditions $y'(0) = \beta$ et $y''(0) = \gamma$ donnent donc $B = \beta$ et $A = \frac{\gamma}{2}$.

La seule solution de (\mathcal{E}) sur $] -1, +\infty[$ qui vérifie $y'(0) = \beta$ et $y''(0) = \gamma$ est $y = \frac{\gamma}{2}f(x) + \beta x$.