CAPES interne de Mathématiques
session 1996
deuxième composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag36e]

Dans tout le problème on se place dans le plan euclidien $\mathscr{P}$, les droites parallèles entre elles sont toujours orientées par des axes de même sens.

I. BIRAPPORT

A. Birapport de quatre nombres.

1. a, b, c, d sont quatre nombres réels distincts, on appelle birapport de ces quatre nombres pris dans cet ordre le nombre noté (a, b, c, d) défini par :

$$(a, b, c, d) = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c}.$$

a. Montrer que si $(a, b, c, d) = \lambda$, on a :

— par « permutation des derniers » $(a, b, d, c) = \dfrac{1}{\lambda}$.

— par « permutation des moyens » $(a, c, b, d) = 1 - \lambda$;

b. On peut vérifier facilement que le birapport ne change pas quand on permute deux des quatre nombres, pourvu que l'on permute également les deux autres (ce travail n'est pas demandé).

Calculer les birapports suivants :

$$(a, c, d, b),\ (a, d, b, c)\ (a, d, c, b) \text{ en fonction de } \lambda = (a, b, c, d).$$

2. *a.* Montrer que le birapport des quatre nombres (x_1, x_2, x_3, x_4) pris dans cet ordre est invariant par une transformation affine $(x \to \alpha x + \beta)$.

b. Montrer que le birapport de ces quatre nombres supposés non nuls est invariant par la transformation inverse $\left(x \to \dfrac{1}{x}\right)$.

c. En déduire que, sous réserve d'existence des opérations à faire, le birapport est invariant par une transformation homographique :

$$\left(x \to \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad \text{avec} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\right).$$

3. Réciproquement on cherche une transformation f laissant invariant le birapport. Soit a, b, c trois nombres distincts fixés ; a', b', c' leurs images par f. Soit x un nombre arbitraire x distinct de a, b, c et x' son image par f tel que :

$$(a', b', c', x') = (a, b, c, x).$$

Montrer que a', b', c', x' sont distincts et que f ne peut être qu'une transformation homographique.

B. Birapport de quatre points, de quatre droites.

1. On considère une droite (Δ) sur laquelle on a choisi une origine O et un vecteur unitaire $\vec{u}$. On appelle birapport de quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de (Δ) pris dans cet ordre le birapport de leurs abscisses. Il sera noté (M_1, M_2, M_3, M_4).

Montrer que $(M_1, M_2, M_3, M_4) = \dfrac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_1M_4}} : \dfrac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_2M_4}}$.

Montrer que le birapport est indépendant du choix de O et de $\vec{u}$.

2. Soient quatre droites distinctes (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) concourantes en O, et (Δ) une droite quelconque ne passant pas par O coupant ces quatre droites aux points M_1, M_2, M_3, M_4 respectivement. Par M_2 on mène une parallèle (D'_1) à (D_1), qui coupe (D_3) en N_3 et (D_4) en N_4. Chaque droite est munie d'un repère.

a. Montrer que : $\dfrac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}} = \dfrac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_3}}$, $\dfrac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}} = \dfrac{\overline{M_1O}}{\overline{M_2N_4}}$.

En déduire que $(M_1\,M_2\,M_3\,M_4) = \dfrac{\overline{M_2N_4}}{\overline{M_2N_3}}$.

b. Soit (Δ') une autre droite ne passant pas par O, coupant (D_1) (D_2) (D_3) (D_4) respectivement en M'_1, M'_2, M'_3, M'_4.

Montrer que : $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)$.

Par définition, cette valeur commune est appelée birapport des quatre droites (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) prises dans cet ordre. Il est noté $((D_1), (D_2), (D_3), (D_4))$.

3. Étendre la définition du birapport au cas où les quatre droites sont parallèles.

4. Un faisceau de quatre droites concourantes ou parallèles est transformé par une isométrie. Que devient leur birapport ?

5. *Birapport de quatre points sur un cercle.* Soit (C) un cercle orienté, M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points distincts de (C), A un point quelconque de (C).

Montrer que le birapport des quatre droites (AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4) est indépendant de la position de A. Si A est confondu avec l'un des points M_i, la droite (AM_i) est remplacée par la tangente en M_i.

Par définition le birapport des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 pris dans cet ordre sur le cercle et noté (M_1, M_2, M_3, M_4) est le birapport des quatre droites (AM_1), (AM_2), (AM_3), (AM_4).

C. **Division harmonique.**

On dit que quatre points alignés distincts A, B, C, D pris dans cet ordre forment une division harmonique si $(A, B, C, D) = -1$. D est dit conjugué harmonique de C par rapport à A et B.

1. *a.* Montrer que si (A, B, C, D) est une division harmonique, il en est de même de la division (B, A, C, D).

b. (A, B, C, D) est une division harmonique, ω est le milieu de AB ; a, b, c, d les abscisses respectives de A, B, C, D sur la droite qui les porte, munie d'un repère. Montrer que :

(i) $2(ab + cd) = (a+b)(c+d)$;

(ii) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$;

(iii) $\omega A^2 = \omega B^2 = \overline{\omega C} \cdot \overline{\omega D}$.

(La démonstration des points (ii) et (iii) peut être facilitée par un choix judicieux de l'origine du repère sur la droite portant les points A, B, C, D).

c. Énoncer la réciproque de (iii). La démonstration faite à la question précédente de la propriété directe est-elle aussi une démonstration de la réciproque (avec quelques précautions de langage) ? Pourquoi ?

d. En déduire que si A et B sont deux points distincts de milieu ω, tout point de la droite (AB) distinct de A, B et ω admet un conjugué harmonique unique.

2. On appelle faisceau harmonique un ensemble ordonné de quatre droites concourantes ou parallèles de birapport -1.

a. Montrer, dans le cas où les droites sont concourantes, qu'une parallèle à l'un des rayons coupe les trois autres en trois points dont l'un est le milieu des deux autres.

b. Énoncer et démontrer la réciproque de la proposition précédente.

Pour démontrer cette propriété caractéristique du faisceau harmonique concourant, on aura intérêt à reprendre dans ce cas particulier la figure de la question I.B.2.

Tournez la page S.V.P.

3. *Pôle et polaire par rapport à deux droites.*

a. (D_1) et (D_2) sont deux droites concourantes en O, A un point du plan n'appartenant ni à (D_1) ni à (D_2). Une droite quelconque passant par A coupe (D_1) en M_1 et (D_2) en M_2. Montrer que le lieu de N conjugué harmonique de A par rapport à M_1 et M_2 est une droite (D), privée de trois points, passant par O. (D) est dite polaire de A par rapport à $((D_1), (D_2))$, A est dit pôle de (D) par rapport à $((D_1), (D_2))$.

b. Étendre la notion précédente au cas où les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

4. *Construction du conjugué harmonique.*

A, B, C sont trois points alignés distincts, I un point quelconque du plan non situé sur la droite portant A, B, C. Une droite passant par C, distincte de la précédente, coupe (IA) en M et (IB) en N. Les droites (MB) et (AN) sont concourantes en J (ou parallèles). Montrer que le conjugué harmonique D de C par rapport à A, B se trouve sur la droite (IJ) (ou sur la parallèle issue de I aux droites (MB) et (AN)).

On considérera la polaire de C par rapport aux droites (IA) et (IB) et celle de C par rapport aux droites (JA) et (JB).

II. UNE TRANSFORMATION DE LEBESGUE

A. Étude de la transformation.

On considère dans le plan $\mathscr{P}$ une droite fixe (Δ) et deux points fixes F et f distincts et n'appartenant pas à (Δ).

Les droites (Δ) et (Ff) sont perpendiculaires en I. Soit $\tau_{F,f}$ la transformation de $\mathscr{P}\setminus(\Delta)$ dans $\mathscr{P}$ définie de la façon suivante.

Soit $m \in \mathscr{P}\setminus(\Delta)$, $m \neq F$:

(i) (Fm) coupe (Δ) en ω, l'homothétie variable h_m de centre ω qui transforme m en F, transforme f en M. On pose :

$$\tau_{F,f}(m) = M.$$

(ii) (Fm) est parallèle à (Δ). La parallèle issue de F à (fm) coupe la parallèle issue de f à (Δ) en M. On pose :

$$\tau_{F,f}(m) = M.$$

(iii) $$\tau_{F,f}(F) = f.$$

1. On considère un repère orthonormé direct de centre I, (IF) est la droite des abscisses et (Δ) la droite des ordonnées. Soient α et β les abscisses respectives de F et f. On note (x, y) les coordonnées d'un point m de $\mathscr{P}\setminus(\Delta)$ et (X, Y) celles de $M = \tau_{F,f}(m)$.

a. Montrer que la transformation $\tau_{F,f}$ admet comme équation :

$$\begin{cases} X = \dfrac{\alpha\beta}{x} \\[2ex] Y = \dfrac{-\alpha y}{x} \end{cases}$$

b. Montrer que $\tau_{F,f}$ est une bijection de $\mathscr{P}\setminus(\Delta)$ et que :

$$\tau_{F,f}^{-1} = \tau_{f,F}.$$

2. *Transformée d'une droite.*

a. Soit (d) une droite coupant (Δ) en p, m un point de (d) tel que $(\mathrm{F}m)$ ne soit pas parallèle à (Δ). On pose $\mathrm{R} = h_m(p)$.

(i) Justifier que (RF) est parallèle à (d) et en déduire que R est indépendant du choix de m sur (d).

(ii) Soit (D) la droite (RM). Montrer que (D) est parallèle à (pf).

(iii) Montrer que la transformée par $\tau_{\mathrm{F},f}$ de (d) privée du point p est la droite (D) privée du point R.

b. Soit (d) une droite parallèle à (Δ), montrer que sa transformée par $\tau_{\mathrm{F},f}$ est une droite (D) parallèle à (Δ).

3. Afin d'alléger l'expression, on parlera dans la suite de transformée d'une droite plutôt que de transformée d'une droite privée d'un point. Montrer les assertions suivantes :

a. Si deux droites (d) et (d_1) sont concourantes en un point p de (Δ), alors leurs transformées par $\tau_{\mathrm{F},f}$ sont deux droites parallèles.

b. Si deux droites (d) et (d_1) sont parallèles et concourantes avec (Δ), alors leurs transformées par $\tau_{\mathrm{F},f}$ sont concourantes en un point de (Δ).

c. Une droite (d) passant par f est transformée par $\tau_{\mathrm{F},f}$ en une droite passant par F et parallèle à (d).

4. *Conservation du birapport.*

m_1, m_2, m_3, m_4 sont quatre points distincts alignés de $\mathscr{P}\setminus(\Delta)$, $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ leurs transformés par $\tau_{\mathrm{F},f}$. Montrer que $((fm_1), (fm_2), (fm_3), (fm_4)) = ((\mathrm{FM}_1), (\mathrm{FM}_2), (\mathrm{FM}_3), (\mathrm{FM}_4))$.

En déduire que $\tau_{\mathrm{F},f}$ conserve le birapport de quatre points alignés, le birapport de quatre droites concourantes ou parallèles.

B. **Transformé d'un cercle particulier et propriétés des coniques.**

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre f et de rayon R. On veut montrer que le transformé de $(\mathscr{C})$, à deux points près éventuellement, par $\tau_{\mathrm{F},f}$, est une conique de foyer F et de directrice (Δ).

1. *a.* Soit H le pied de la perpendiculaire issue de M à (Δ). (Comme en A : $\mathrm{M} = \tau_{\mathrm{F},f}(m)$.)

Montrer que $\dfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = \dfrac{fm}{f\mathrm{I}}$.

b. En déduire que M appartient à la conique de foyer F de directrice (Δ) et d'excentricité $\dfrac{\mathrm{R}}{|\beta|}$.

c. Déterminer la nature de la conique (ellipse, parabole, hyperbole) selon les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de (Δ). On justifiera les résultats obtenus.

d. Vérifier que toute conique de foyer F et de directrice (Δ) est image d'un cercle par une transformation $\tau_{\mathrm{F},f}$.

2. On admet que la transformation $\tau_{\mathrm{F},f}$ conserve les contacts (une courbe et sa tangente sont transformées en une courbe et sa tangente). Soient m un point de $(\mathscr{C})$, (t) la tangente à $(\mathscr{C})$ en m, (t) coupe (Δ) en p. (T) image de (t) par $\tau_{\mathrm{F},f}$ est tangente en M à la conique (Γ) image de $(\mathscr{C})$ par la même transformation.

Déduire des résultats précédents le théorème :

« La portion de tangente à une conique comprise entre le point de contact et une directrice est vue du foyer correspondant sous un angle droit. »

3. Soit p un point du plan extérieur au cercle $(\mathscr{C})$, m et n les points de contact des tangentes issues de p à $(\mathscr{C})$. On appelle M, N, P les transformées de m, n, p par $\tau_{\mathrm{F},f}$.

Démontrer, à partir des propriétés de cette transformation, le deuxième théorème de Poncelet :

« P étant un point extérieur à une conique (Γ) de foyer F, M et N les points de contact des tangentes issues de P à (Γ), la droite (PF) est bissectrice de l'angle de droites (FM, FN). »

4. *Birapport de quatre points sur une conique.*

(Γ) est une conique de foyer F, de directrice (Δ) et d'excentricité e; M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points distincts de (Γ). Trouver un cercle $(\mathscr{C})$ tel que (Γ) soit le transformé de $(\mathscr{C})$ par une transformation $\tau_{F,f}$. m_1, m_2, m_3, m_4 sont les antécédents de M_1, M_2, M_3, M_4 par $\tau_{F,f}$. On appelle birapport des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de (Γ) pris dans cet ordre, le birapport (m_1, m_2, m_3, m_4) sur le cercle $(\mathscr{C})$.

Montrer que cette définition est intrinsèque, c'est-à-dire indépendante de la transformation choisie.

5. Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre f et de rayon R coupe la droite (IF) en a et a'. On suppose ici que a et a' sont distincts de I. A et A' sont les transformées de a et a' par $\tau_{F,f}$. O est le milieu du segment [AA'].

a. Montrer que la division (A, A', I, F) est harmonique.

b. Montrer que $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{OI}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{AI}}{\overline{FA}}$ (on pourra utiliser le résultat obtenu en (I.C.1.)).

En déduire que $\dfrac{OF}{OA} = e$ excentricité de la conique (Γ) transformée de $(\mathscr{C})$ par $\tau_{F,f}$.

c. On appelle $(\mathscr{C}_0)$ le cercle de diamètre [AA']. $(\mathscr{C}_0)$ est appelé cercle principal de (Γ), m est un point de $(\mathscr{C})$. On pose $M = \tau_{F,f}(m)$ et $m_0 = \tau_{F,0}^{-1}(M)$.

Montrer que la conique (Γ) est transformée de $(\mathscr{C}_0)$ par $\tau_{F,0}$ ($(\mathscr{C}_0)$ est éventuellement amputé de ses points d'intersection avec (Δ)).

d. La tangente en m_0 à $(\mathscr{C}_0)$ coupe (Δ) en q (m_0 distinct de A et A'). Montrer que la tangente (T) en M à (Γ) est parallèle à (Oq).

6. L'abscisse de F est α, celle de O est γ, R_0 est le rayon de $(\mathscr{C}_0)$, (x_0, y_0) sont les coordonnées d'un point m_0 de $(\mathscr{C}_0)$ distinct de A et A' et non situé sur (Δ), M est le point de (Γ) image de m_0 par $\tau_{F,0}$. Les autres notations sont celles des questions précédentes.

a. Montrer que $R_0^2 = \gamma(\gamma - \alpha)$ et donner l'équation de $(\mathscr{C}_0)$.

b. Établir que les droites (Oq) et (Fm_0) sont perpendiculaires.

c. K est le point de concours des deux droites perpendiculaires (T) et (Fm_0). Chercher les coordonnées de K et montrer que K est sur le cercle $(\mathscr{C}_0)$. En déduire le théorème suivant :

« Dans une conique à centre, le projeté d'un foyer sur une tangente à la conique est sur le cercle principal. »

7. On appelle N le point de (Γ) tel que $N = \tau_{F,0}(K)$ et F' le symétrique de F par rapport à O.

a. Montrer que O est le milieu du segment [MN].

En déduire que O est centre de symétrie de (Γ).

b. Calculer en fonction de α, R_0, x_0 les longueurs FM et FN. (On simplifie notablement le calcul en considérant le point N comme transformé de K par $\tau_{F,0}$, tout comme M est transformé de m_0 par la même transformation.)

c. Montrer que si : (i) $e = \dfrac{R_0}{|\gamma|} < 1$ on a :

$$FM + F'M = 2R_0;$$

(ii) $e = \dfrac{R_0}{|\gamma|} > 1$ on a :

$$|FM - F'M| = 2R_0.$$

On retrouve la définition bifocale des coniques à centre.