Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

C.C.P. 2004, filière MP, première épreuve

• Partie I

1. a) $\big(S_n(f)\big)$ converge simplement vers la fonction $\widetilde{f}\ :\ x \longmapsto \frac{1}{2}\big(\lim\limits_{x-} f + \lim\limits_{x+} f\big)$.

   b) Les $S_n(f)$ étant continues, la convergence n'est uniforme que si $\widetilde{f}$ l'est, c'est-à-dire si les limites de f à gauche et à droite en chacun de ses points de discontinuité sont égales.

2. Soit $(c_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision quelconque de $[0, \pi]$. La restriction de φ à $]0, c_1[$ ne peut pas se prolonger en une fonction de classe C^1 sur $[0, c_1]$, puisque sa dérivée n'est pas bornée. φ n'est donc pas de classe C^1 par morceaux.

3. a) La convergence de (u_n) vers ℓ peut se traduire par $u_n - \ell = \mathrm{o}(1)$. Comme $\sum 1$ est une série divergente à termes positifs, on sait que $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \ell) = \mathrm{o}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} 1\Big)$, c'est-à-dire $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - \ell) = \mathrm{o}(n+1)$.

   b) Le a) se réécrit $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k - (n+1)\ell = \mathrm{o}(n+1)$, ou encore, par division, $\lim\Big(\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\Big) = \ell$.

4. Notons g la limite simple de la suite $\big(S_n(f)\big)$. D'après le théorème de Cesàro, la suite $\big(\sigma_n(f)\big)$ converge aussi simplement vers g, mais d'après le théorème de Fejér, cette même suite converge uniformément, et *a fortiori* simplement, vers f. L'unicité de la limite donne $f = g$.

5. La suite convergente (u_n) étant bornée, on peut définir, pour $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sup\limits_{k \geqslant n} u_k$.

   Par construction, $u_n \leqslant d_n$. D'autre part, (d_n) est décroissante car $[\![n+1, +\infty[\![\subset [\![n, +\infty[\![$.
   Soit alors $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; on peut lui associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant n_0$; par définition de la borne supérieure, on aura alors $d_n \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Cela montre que (d_n) converge vers 0.

• Partie II

6. De façon évidente, $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente.

   Notons que cette convergence uniforme assure la continuité sur $[0, \pi]$ de la somme de la série $\sum f_n$, et donc aussi la continuité de la fonction f définie par l'énoncé.

7. a) On transforme le produit en somme : $\cos pt \,\sin\dfrac{(2k+1)t}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(\sin\dfrac{(2k+2p+1)t}{2} + \sin\dfrac{(2k-2p+1)t}{2}\Big)$.

   Il vient alors immédiatement $I_{p,k} = \dfrac{1}{2k+2p+1} + \dfrac{1}{2k-2p+1}$.

   b) D'après a), $T_{q,k} = \sum\limits_{p=0}^{q} \dfrac{1}{2k+2p+1} + \sum\limits_{p=0}^{q} \dfrac{1}{2k-2p+1} = \sum\limits_{j=k}^{k+q} \dfrac{1}{2j+1} + \sum\limits_{j=k-q}^{k} \dfrac{1}{2j+1} = \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=k-q}^{k+q} \dfrac{1}{2j+1}$.

   Si $q \leqslant k$, la positivité de $T_{q,k}$ est évidente. Si $q > k$, on écrit :
   $T_{q,k} = \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=k-q}^{q-k-1} \dfrac{1}{2j+1} + \sum\limits_{j=q-k}^{q+k} \dfrac{1}{2j+1} = \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=q-k}^{q+k} \dfrac{1}{2j+1}$, car les termes de la première somme sont deux à deux opposés ; d'où encore $T_{q,k} \geqslant 0$ dans ce cas.

   c) $\dfrac{1}{2k+1} \sim \dfrac{1}{2k+2}$, d'où par théorème (séries divergentes) : $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{2k+1} \sim \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{2k+2} = \sum\limits_{k=1}^{N+1} \dfrac{1}{2k} \sim \dfrac{\ln(N+1)}{2} \sim \dfrac{\ln N}{2}$.

   d) $T_{k,k} = \dfrac{1}{2k+1} + \sum\limits_{j=0}^{2k} \dfrac{1}{2j+1}$ et d'après c), $\sum\limits_{j=0}^{2k} \dfrac{1}{2j+1} \sim \dfrac{1}{2}\ln(2k) = \dfrac{1}{2}(\ln k + \ln 2) \sim \dfrac{1}{2}\ln k$.

   $\dfrac{1}{2k+1}$ étant négligeable devant $\ln k$, on a encore $T_{k,k} \sim \dfrac{1}{2}\ln k$.

8. Dans cette question et la suivante, on notera, pour $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 2^{n^3-1}$.

   f étant paire, $a_p(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\cos pt\,\mathrm{d}t$. Comme $|\cos pt| \leqslant 1$, la série des fonctions $t \longmapsto f_n(t)\cos pt$ est encore normalement convergente, de somme $t \longmapsto f(t)\cos pt$; cela autorise l'intégration terme à terme, qui donne :

$$a_p(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi f_n(t)\cos pt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}I_{p,r_n}.$$

9. Compte tenu de la parité de f, de la remarque du texte et du résultat du 8., on a :

$S_{r_p}(f)(0) = -\dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{i=0}^{r_p} a_i(f) = -\dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{i=0}^{r_p} \left(\dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} I_{i,r_n} \right)$, puis, par interversion (somme finie de séries) :

$S_{r_p}(f)(0) = -\dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=0}^{r_p} I_{i,r_n} \right) = -\dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} T_{r_p,r_n} \geqslant -\dfrac{a_0(f)}{2} + \dfrac{2}{\pi p^2} T_{r_p,r_p}$ car, d'après 7.b), on peut minorer la somme de la dernière série par son terme d'indice p.

Ensuite, le 7.d) donne $T_{r_p,r_p} \sim \frac{1}{2} \ln r_p \sim \frac{\ln 2}{2} p^3$, et l'inégalité ci-dessus montre que $S_{r_p}(f)(0)$ tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$. Ainsi, la suite $\big(S_n(f)(0)\big)$ possède une sous-suite divergente, et est donc elle-même divergente.

- **Partie III**

10. f est continue sur $]0, 1]$ par théorèmes généraux. f est aussi continue en 0 car $x \cos \frac{\pi}{2x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, puisque le cosinus est borné. D'autre part, avec la subdivision σ indiquée par l'énoncé, on a :

$V(\sigma, f) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} \big| f(x_{k+1}) - f(x_k) \big| = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \big| (-1)^{n-k} x_{k+1} - (-1)^{n+1-k} x_k \big| = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (x_k + x_{k+1}) = \dfrac{1}{2} \left(\sum\limits_{j=2}^{n} \dfrac{1}{j} + \sum\limits_{j=1}^{n-1} \dfrac{1}{j} \right)$.

La divergence de la série $\sum \frac{1}{j}$ montre que $V(\sigma, f)$ peut être rendu arbitrairement grand en choisissant convenablement n. f n'est donc pas à variation bornée.

11. a) Les $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ étant tous de même signe, on a $V(\sigma, f) = |f(b) - f(a)|$ pour toute $\sigma \in S_{[a,b]}$.
f est donc à variation bornée et $V([a, b], f) = |f(b) - f(a)|$.

b) Supposons que $f = g+h$, où g et h sont monotones, donc à variation bornée d'après le a). L'inégalité triangulaire donne, pour toute $\sigma \in S_{[a,b]}$: $V(\sigma, f) \leqslant V(\sigma, g) + V(\sigma, h) \leqslant V([a, b], g) + V([a, b], h)$, qui ne dépend pas de σ.
On en déduit que f est à variation bornée (et incidemment que $V([a, b], f) \leqslant V([a, b], g) + V([a, b], h)$).

c) Soit Df une pseudo-dérivée de f. Pour toute $\sigma = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in S_{[a,b]}$, on a :

$V(\sigma, f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left| \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} Df(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \big|Df(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|Df\|_\infty\,(x_{k+1} - x_k) = \|Df\|_\infty\,(b - a)$.

Le majorant obtenu ne dépend pas de σ, donc f est à variation bornée.

12. Soient $\sigma_1 \in S_{[a,c]}$ et $\sigma_2 \in S_{[c,b]}$. Notons σ la subdivision de $[a, b]$ obtenue par recollement de σ_1 et σ_2.
De façon évidente, $V(\sigma_1, f) + V(\sigma_2, f) = V(\sigma, f) \leqslant V([a, b], f)$.
σ_2 étant d'abord fixée, cette inégalité, valable pour toute $\sigma_1 \in S_{[a,c]}$, montre que $f_{|[a,c]}$ est à variation bornée et que $V([a, c], f) \leqslant V([a, b], f) - V(\sigma_2, f)$, ou encore $V(\sigma_2, f) \leqslant V([a, b], f) - V([a, c], f)$.
Ensuite, l'inégalité précédente, valable pour toute $\sigma_2 \in S_{[c,b]}$, montre que $f_{|[c,b]}$ est à variation bornée et que $V([c, b], f) \leqslant V([a, b], f) - V([a, c], f)$, ce qui est l'inégalité demandée.

13. a) On a d'abord, par inégalité triangulaire et inégalité des modules :

$$\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(t) - f(x_k)\big)\,e^{-int}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big|f(t) - f(x_k)\big|\,\mathrm{d}t.$$

Mais pour $t \in]x_{k-1}, x_k[$, $|f(t) - f(x_k)| \leqslant |f(t) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(t)| \leqslant V_k(f)$, puisque (x_{k-1}, t, x_k) est une subdivision de $[x_{k-1}, x_k]$, donc $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big|f(t) - f(x_k)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant V_k(f)\big(x_k - x_{k-1}\big)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\,e^{-int}\,dt = \sum_{k=1}^{|n|N} \frac{i f(x_k)}{n} \left(e^{-inx_k} - e^{-inx_{k-1}} \right) = \frac{i}{n} \left(\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)\,e^{-inx_k} - \sum_{k=0}^{|n|N-1} f(x_{k+1})\,e^{-inx_k} \right)$.

f étant 2π-périodique on peut indexer la première somme par $[\![0, |n|N - 1]\!]$ au lieu de $[\![1, |n|N]\!]$, ce qui donne :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\,e^{-int}\,dt = \frac{i}{n} \left(\sum_{k=0}^{|n|N-1} \Big(f(x_k) - f(x_{k+1})\Big) e^{-inx_k} \right)$ puis, par inégalité triangulaire :

$\displaystyle\left| \sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\,e^{-int}\,dt \right| \leqslant \frac{1}{|n|} \sum_{k=0}^{|n|N-1} \Big| f(x_k) - f(x_{k+1}) \Big| \leqslant \frac{V([0, 2\pi], f)}{|n|}$.

c) $|c_n(f)| = \dfrac{1}{2\pi}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,e^{-int}\,\mathrm{d}t\right|$, donc par addition des inégalités du a) et du b) et inégalité triangulaire :

$$|c_n(f) \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{|n|N}\frac{2\pi V_k(f)}{|n|N}+\frac{V([0,2\pi],f)}{|n|}\right)=\frac{1}{2\pi|n|}\left(\frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{|n|N}V_k(f)+V([0,2\pi],f)\right)\leqslant\Big(1+\frac{2\pi}{N}\Big)\frac{V([0,2\pi],f)}{2\pi|n|},$$

car d'après la question 12, étendue de façon évidente, $\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N}V_k(f)\leqslant V([0,2\pi],f)$.

n étant fixé dans $\mathbb{Z}^*$, l'inégalité obtenue est valable pour tout $N\in\mathbb{N}^*$. Le passage à la limite pour N tendant vers $+\infty$ donne $|c_n(f)\leqslant \dfrac{V([0,2\pi],f)}{2\pi|n|}$.

14. a) $k(S_n-L)-(n+k)(\sigma_{n+k-1}-L)+n(\sigma_{n-1}-L)=kS_n-(n+k)\sigma_{n+k-1}+n\sigma_{n-1}=kS_n-\displaystyle\sum_{j=0}^{n+k-1}S_j+\sum_{j=0}^{n-1}S_j$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}(S_n-S_{j+n})=-\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\sum_{i=n+1}^{n+j}u_i\Big).$$

b) En utilisant l'inégalité triangulaire et les hypothèse sur les suites (d_n) et (u_n), on déduit de l'égalité du a) que :

$$|S_n-L|\leqslant\frac{(n+k)}{k}d_{n+k-1}+\frac{n}{k}d_{n-1}+\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\Big(\sum_{i=n+1}^{n+j}\frac{A}{i+1}\Big)\leqslant\frac{(n+k)}{k}d_{n-1}+\frac{n}{k}d_{n-1}+\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{Aj}{n+2},$$

c'est-à-dire $|S_n-L|\leqslant\Big(1+\dfrac{2n}{k}\Big)d_{n-1}+A\,\dfrac{k-1}{2(n+2)}$.

c) Compte tenu du choix de k, il découle directement du b) que :

$$|S_n-L|\leqslant d_{n-1}+\frac{2nd_{n-1}}{2n\sqrt{d_{n-1}}}+A\,\frac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}\leqslant d_{n-1}+(1+A)\sqrt{d_{n-1}}.$$

Par encadrement, on en déduit que la suite (S_n) converge vers L.

15. On sait par le théorème de Fejér que $\big(\sigma_n(f)\big)$ converge uniformément vers f. On peut donc, d'après 5., trouver une suite décroissante (d_n) telle que $\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\leqslant d_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On a ainsi *a fortiori,* pour tout $t\in\mathbb{R}$: $\forall n\in\mathbb{N},\ |\sigma_n(f)(t)-f(t)|\leqslant d_n$.

Soit alors $\sum u_n(f)$ la série de Fourier de f. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}$, on peut écrire, en utilisant notamment 13.c) :

$|u_n(f)(t)|\leqslant|c_n(f)|+|c_{-n}(f)|\leqslant\dfrac{V([0,2\pi],f)}{n\pi}\leqslant\dfrac{2\,V([0,2\pi],f)}{(n+1)\pi}$.

Il vient donc, en posant $A=\max\Big(|c_0(f)|,\ \dfrac{2\,V([0,2\pi],f)}{\pi}\Big)$: $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{R},\ |u_n(f)(t)|\leqslant\dfrac{A}{n+1}$.

On peut alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$, appliquer la question 14. à la suite $\big(u_n(f)(t)\big)$ (avec ici $L=f(t)$), ce qui donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ \big|S_n(f)(t)-f(t)\big|\leqslant d_{n-1}+(1+A)\sqrt{d_{n-1}}$. Cela établit la convergence uniforme de $\big(S_n(f)\big)$ vers f, puisque le membre de droite ne dépend pas de t et tend vers 0.

16. Il est clair que φ est continue. D'autre part, $\varphi(t)=\begin{cases}\sqrt{t} & \text{si } t\in[0,\pi]\\ \sqrt{2\pi-t} & \text{si } t\in[\pi,2\pi].\end{cases}$

On peut donc écrire $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ avec $\varphi_1(t)=\begin{cases}\sqrt{t} & \text{si } t\in[0,\pi]\\ \sqrt{\pi} & \text{si } t\in[\pi,2\pi]\end{cases}$ et $\varphi_2(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\in[0,\pi]\\ \sqrt{2\pi-t}-\sqrt{\pi} & \text{si } t\in[\pi,2\pi].\end{cases}$

φ_1 et φ_2 sont monotones, donc, d'après 11.b), la restriction de φ à $[0,2\pi]$ est à variation bornée. Par conséquent, le résultat obtenu au 15 s'applique : la série de Fourier de φ converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$.

17. Étant lipschitzienne, f est continue.

Ensuite, soit k un rapport de Lipschitz de f. Pour toute subdivision $\sigma=(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[0,2\pi]$, on a :

$V(\sigma,f)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\big|f(x_{i+1})-f(x_i)\big|\leqslant k\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=2k\pi$, qui ne dépend pas de σ. On en déduit que la restriction de f à $[0,2\pi]$ est à variation bornée et, de nouveau, que le résultat du 15. s'applique.