

## Première partie

1. Exemple de paire complémentaire de longueur 2 :  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ .

Pour une paire de longueur 3, les relations à vérifier sont  $\begin{cases} a_0a_2 + b_0b_2 = 0 \\ a_1(a_0 + a_2) + b_1(b_0 + b_2) = 0 \end{cases}$ .

Quitte à échanger les séquences, la première relation entraîne  $a_0a_2 = 1$  et  $b_0b_2 = -1$ , c'est-à-dire  $a_0 = a_2$  et  $b_0 = -b_2$ , puis la deuxième relation donne  $2a_1a_0 = 0$  ce qui est impossible. Donc il n'y a pas de paire de longueur 3.

2. a) Soit  $\varphi$  cette fonction. Si la longueur  $\ell$  de  $\underline{a}$  est strictement supérieure à celle de  $\underline{b}$  alors  $\varphi(x) \sim a_{\ell-1}a_0x^{\ell-1}$  au voisinage de  $+\infty$ , donc non bornée car  $a_{\ell-1}a_0 \in \{-1, 1\}$ . Même chose en 0 puisque  $\varphi(x) = \varphi(\frac{1}{x})$ .

Le coefficient de  $x^k$ ,  $k > 0$ , dans  $\varphi(x)$  est  $\sum_{i=0}^{\ell-1-k} (a_i a_{i+k} + b_i b_{i+k})$ . Même chose pour  $k < 0$  puisque  $\varphi(x) = \varphi(\frac{1}{x})$ .  $\varphi$  est constante si et seulement si ces coefficients sont nuls, ce qui équivaut au fait que la paire  $\underline{a}, \underline{b}$  est complémentaire.

La constante vaut  $\sum_{i=0}^{\ell-1-k} a_i^2 + b_i^2 = 2\ell$ .

b)  $P_{\underline{a}}(1) = 2n(1) - \ell$  où  $n(1)$  est le nombre de 1 dans  $\underline{a}$ . Donc  $P_{\underline{a}}(1)$  et  $\ell$  ont la même parité, ce qui répond à la question.

Soient  $\underline{a}, \underline{b}$  une paire complémentaire de longueur  $\ell$  alors  $\varphi(1) = P_{\underline{a}}(1)^2 + P_{\underline{b}}(1)^2 = 2\ell$ , ceci permet d'écrire

$$\ell = \left( \frac{P_{\underline{a}}(1) + P_{\underline{b}}(1)}{2} \right)^2 + \left( \frac{P_{\underline{a}}(1) - P_{\underline{b}}(1)}{2} \right)^2$$

La parité assure qu'il s'agit bien de carrés d'entiers.

c) Si  $\ell = \alpha^2 + \beta^2$  est impair, on a par exemple  $\alpha$  pair et  $\beta$  impair, donc  $\ell = 4\alpha'^2 + (2\beta' + 1)^2 = 4(\alpha'^2 + \beta'^2 + \beta') + 1$ . Donc le reste de la division de  $\ell$  par 4 est égal à 1. Ainsi  $\mathbb{N} \setminus \mathcal{L}$  contient tous les entiers dont le reste de la division par 4 vaut 3.

3. a) Cette nouvelle fonction  $\psi(x)$  vaut  $\frac{1}{2}\varphi(x)$  (fonction du 2.a).

b) On vérifie que cette paire est complémentaire...

4. Soit  $n(-1)$  le nombre de  $-1$  dans  $\underline{v}$  alors :  $\sum_{i=0}^{2m-1} v_i = 2(m - n(-1))$  tandis que  $\prod_{i=0}^{2m-1} v_i = (-1)^{n(-1)}$ . Donc 4 divise la somme si et seulement si  $m - n(-1)$  est pair et le produit vaut  $(-1)^m$  si et seulement si  $m$  et  $n(-1)$  ont même parité.

5. a) La séquence proposée dans l'indication, pour  $1 \leq j \leq \ell - 1$ , est de longueur paire  $2(\ell - j)$ . Sa somme est nulle, donc multiple de 4. Par conséquent son produit est  $(-1)^{\ell-j}$  d'après la question précédente. En groupant convenablement les termes, on s'aperçoit que ce produit est celui proposé.

b) Posant  $R_j = \prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j}$ , on a  $R_j R_{j+1} = x_{\ell-1-j} x_j$  car les autres termes du produit sont des  $x_p^2$ . On trouve donc  $x_{\ell-1-j} x_j = -1$ .

c) Supposons par l'absurde  $\ell = 2j + 1$  impair alors la relation précédente donne  $x_j^2 = -1$  ce qui est absurde. Donc  $\ell$  est pair.

Deuxième partie

6.  $P_1 = 1 + X$ ,  $Q_1 = 1 - X$  et  $P_2 = 1 + X + X^2 - X^3$ ,  $Q_2 = 1 + X - X^2 + X^3$ .

b) On peut utiliser les puissances de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A^{2n} = 2^n I$ ,  $A^{2n+1} = 2^n A$ .

Ainsi  $P_{2n}(1) = Q_{2n}(1) = 2^n$ ,  $P_{2n+1}(1) = 2^{n+1}$ ,  $Q_{2n+1}(1) = 0$ .

Attention pour  $x = -1$ , on a la même relation de récurrence si  $n \geq 1$ . On trouve

$$P_{2n}(-1) = -Q_{2n}(-1) = 2^n, P_{2n+1}(-1) = 0, Q_{2n+1}(-1) = 2^{n+1}$$

7. Par récurrence,  $P_n$  et  $Q_n$  sont de degré  $2^n - 1$ . Les coefficients de  $P_{n+1}$  sont ceux de  $P_n$  jusqu'au degré  $2^n - 1$  puis ceux de  $Q_n$  à partir du degré  $2^n$ . Même chose pour  $Q_{n+1}$ ; donc les coefficients des polynômes sont bien dans  $\{-1, 1\}$ .

En utilisant les polynômes  $U, V$  (question 3.a) associés à  $P_{n+1}$  et  $Q_{n+1}$ , on a  $U = P_n$ ,  $V = X^{2^n} Q_n$  donc  $U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = P_n(x)P_n(x^{-1}) + Q_n(x)Q_n(x^{-1})$  qui est constant par récurrence.  $(P_n, Q_n)$  donne ainsi une paire complémentaire de longueur  $2^n$ , donc  $2^n \in \mathcal{L}$ .

8. Par récurrence sur  $n$ . On remplace  $X$  par  $-\frac{1}{z}$  dans la relation (1) puis on multiplie par  $z^{2^{n+1}-1}$ ,  $z^{2^{n+1}-1}P_{n+1}(-\frac{1}{z}) = z^{2^n} z^{2^n-1}P_n(-\frac{1}{z}) + z^{2^n-1}Q_n(-\frac{1}{z})$ .

On remplace  $P_n(-\frac{1}{z})$  et  $Q_n(-\frac{1}{z})$  en utilisant l'égalité à l'ordre  $n$ , ce qui donne  $(-1)^n(z^{2^n}Q_n(z) - P_n(z)) = (-1)^{n+1}Q_{n+1}(z)$  et achève la récurrence.

9. L'inégalité est vraie pour une racine  $\alpha$  de module inférieur à 1, on s'intéresse au cas  $|\alpha| > 1$ .  $\alpha^d = -\frac{1}{t_d} \left( \sum_{i=0}^{d-1} t_i \alpha^i \right)$  d'où  $|\alpha|^d \leq M \sum_{i=0}^{d-1} |\alpha|^i$  où  $M = \sup_{0 \leq i \leq d-1} |t_i/t_d|$ .

On trouve donc  $|\alpha|^d \leq M \frac{|\alpha|^d - 1}{|\alpha| - 1} \leq M \frac{|\alpha|^d}{|\alpha| - 1}$  d'où l'on conclut que  $M \geq |\alpha| - 1$  c'est-à-dire  $|\alpha| \leq M + 1$ .

b)  $P_n$  et  $Q_n$  sont à coefficients dans  $\{-1, 1\}$ , d'après l'inégalité précédente, les racines  $\alpha$  de  $P_n$  et  $Q_n$  vérifient  $|\alpha| \leq 2$ .

On déduit de la question 8 que si  $\alpha$  est racine de  $P_n$  alors  $-\frac{1}{\alpha}$  est racine de  $Q_n$  et c'est la même chose en échangeant  $P_n$  et  $Q_n$ . Donc on a aussi  $\frac{1}{|\alpha|} \leq 2$ .

En reprenant les calculs de 9.a avec l'hypothèse  $|\alpha| = 2$  et  $M = 1$ , on trouve  $2^d \leq \sum_{i=0}^{d-1} 2^i$  ce qui est faux. Les inégalités sont donc strictes.

10. a)  $P_n(x) - P_{n-1}(x) = x^{2^{n-1}}Q_{n-1}(x)$  est formé de monomes  $u_k x^k$  où  $2^{n-1} \leq k \leq 2^n - 1$  et  $u_k \in \{-1, 1\}$ .  $P_n$  est donc la somme partielle d'ordre  $2^n - 1$  d'une série entière  $S$ .

Les coefficients de la série entière sont dans  $\{-1, 1\}$  donc son rayon de convergence est 1.

b) Supposons par l'absurde  $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \alpha^p = 0$  avec  $|\alpha| < \frac{1}{2}$ . Alors  $|u_0| \leq \sum_{p=1}^{+\infty} |u_p| |\alpha|^p < \sum_{p=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^p$ . Cette dernière somme valant 1, on aboutit à une contradiction.

Donc  $S$  n'a pas de zéro dans le disque ouvert considéré.