

Partie I

1. Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$. $\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - 9t \end{cases}$

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x(-t) = -t^3 + 3t^2 + 9t = -y(t) \\ y(-t) = -t^3 - 3t^2 + 9t = -x(t) \end{cases}$

Donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = -x$ et

$\Delta : y = -x$ est axe de symétrie de Γ_A

- b) x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t^2 + 2t - 3) \\ y'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t^2 - 2t - 3) \end{cases}$ recherche des racines au brouillon ! rédaction :

$t^2 + 2t - 3$ binôme ayant pour racines 1 et -3 d'où son signe

$t^2 - 2t - 3$ binôme ayant pour racines -1 et 3 d'où son signe

En $+\infty$: $x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t = t^3(1 + 3/t - 9/t^2) \rightarrow +\infty$ et $y(t) \rightarrow +\infty$

t	0	1	3	$+\infty$
$x'(t)$	-9	-	0	+
$x(t)$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$ 27 $\nearrow$ $+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	-11	$\searrow$ -27 $\nearrow$
$y'(t)$	-9	-	-	0
$m(t)$	1	∞	0	

tangentes horizontale en $t = 3$, verticale en $t = 1$ et pente $m(0) = \frac{y'(0)}{x'(0)} = 1$ en $t = 0$

- c) $M(t)$ est un point double s'il existe $\tau \neq t$ tel que $M(t) = M(\tau) \iff \begin{cases} x(t) = x(\tau) \\ y(t) = y(\tau) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t^3 + 3t^2 - 9t = \tau^3 + 3\tau^2 - 9\tau \\ t^3 - 3t^2 - 9t = \tau^3 - 3\tau^2 - 9\tau \end{cases}$ et avec $L_2 - L_1 \rightarrow L_2$

$\iff (1) \begin{cases} t^3 + 3t^2 - 9t = \tau^3 + 3\tau^2 - 9\tau \\ -6t^2 = -6\tau^2 \end{cases}$ et $L_2 \iff t = \pm\tau \iff \tau = -t$

$(1) \iff \begin{cases} 2t^3 - 18t = 0 \\ \tau = -t \end{cases}$ et $L_1 \iff 2t(t^2 - 9) = 0$

et comme pour $t = 0$, on a $-t = t$, ce n'est pas le paramètre d'un point double.

Donc le seul point double est $M(3) = M(-3)$ de coordonnées $(27, -27)$ tangente horizontale pour $t = 3$ et par symétrie, tangente verticale pour $t = -3$

L'angle entre les deux tangentes est donc droit.

- d) En $+\infty$:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^3 - 3t^2 - 9t}{t^3 + 3t^2 - 9t} = \frac{t^3}{t^3} \frac{1 - 3/t - 9/t^2}{1 + 3/t - 9/t^2} \rightarrow 1 \text{ et}$$

$$y(t) - 1x(t) = -6t^2 \rightarrow -\infty$$

Il y a donc une branche parabolique de direction $y = x$ en $t \rightarrow +\infty$ (la courbe étant en dessous de cette direction)

- e) Echelle : 1 cm pour 10, on place la tangente à l'origine, le point $(27, -27)$ avec tangente horizontale et verticale, les points $(-5, -11)$ tangente verticale et $(5, 11)$ tangente horizontale par symétrie, et on fait partir la branche infinie dans la direction $y = x$

2. L'aire de la boucle formée par Γ_A est donnée par Green Riemann :

Courbe fermée C^1 dans le sens direct. $\mathcal{A} = \int_{-} x dy$ avec $y(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ et $dy = (3t^2 - 6t - 9) dt$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-3}^3 (t^3 + 3t^2 - 9t) (3t^2 - 6t - 9) dt \\ &= \int_{-3}^3 3t^5 + 3t^4 - 54t^3 + 27t^2 + 81t dt \\ &= \left[\frac{3}{6}t^6 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{54}{4}t^4 + \frac{27}{3}t^3 + \frac{81}{2}t^2 \right]_{-3}^3 \\ &= 0 + 2\frac{3}{5}3^5 + 2\frac{27}{3}3^3 = 2 \times 3^5 \left(\frac{3}{5} + 1 \right) \\ &= \frac{2^4 \times 3^5}{5}\end{aligned}$$

3. On revient au cas général. $\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - at \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - bt \end{cases}$

a) Un point stationnaire est un point en lequel la vitesse s'annule :

$$\begin{aligned}\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 3t^2 + 6t - a = 0 \\ 3t^2 - 6t - b = 0 \end{cases} \text{ et avec } L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} 3t^2 + 6t - a = 0 \\ -12t - b + a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\left(\frac{a-b}{12}\right)^2 + 6\left(\frac{a-b}{12}\right) - a = 0 \\ t = \frac{a-b}{12} \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } t \text{ existe} \iff 3(a-b)^2 + 6 \times 12(a-b) - 144a = 0 \iff \boxed{(a-b)^2 - 24(a+b) = 0 : \mathcal{P}}$$

b) $\mathcal{P} : a^2 - 2ab - 24a + b^2 - 24b = 0 : \mathcal{P}$

est une équation de conique (non vide car contient l'origine.)

On recherche un centre en annulant le gradient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a} : 2a - 2b - 24 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial b} : -2a + 2b - 24 = 0 \end{cases} \text{ et } L_1 + L_2 \iff 48 = 0$$

La conique n'a pas de centre donc $\mathcal{P}$ est une parabole.

La matrice associée à la forme quadratique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = H$

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ donc 0 est valeur propre associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et 2 est valeur propre associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée donc avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ on a

$$\boxed{H = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP}$$

Avec (a, b) les coordonnées dans la base initiale et (x, y) celles dans $\mathcal{C}$ on a (formule de changement de base)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$\mathcal{P} : (a - b)^2 - 24(a + b) = 0$ est plus sympathique pour le changement de base
 $\iff 2y^2 + \sqrt{2}24x = 0 \iff y^2 = 12\sqrt{2}x$ parabole d'axe Oy ($\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ dans le repère initial) de sommet O et de paramètre $6\sqrt{2}$
 Tracer la tangente à l'origine, placer le foyer à $d = 3\sqrt{2}$ du sommet

Partie II

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$, et A, B, C trois points non alignés de ce plan. On suppose que le triangle ABC est direct, et n'a que des angles aigus. On note :

$$a = BC \quad , \quad b = AC \quad , \quad c = AB$$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) , et on note $h = AH$.

$\hat{A}$ désigne l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, $\hat{B}$ l'angle géométrique $\widehat{CBA}$, et $\hat{C}$ l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.
 Pour cet exercice, le tracé d'un dessin sur la copie sera apprécié.

1. Donner la relation entre $\sin(\hat{C})$, h et b .

Dans le triangle CHA rectangle en H , pour l'angle $\hat{C}$, l'hypoténuse est $CA = b$ et le coté opposé est $AH = h$ donc le sinus de l'angle est $\sin(\hat{C}) = \frac{h}{b}$

2. Rappeler la formule donnant l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $\widehat{ABC}$ en fonction de a et h .

L'aire d'un triangle est $\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur avec ici base = $CB = a$ et hauteur = $AH = h$ donc

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ah$$

3. et en tirant h de l'expression précédente : $h = b \sin(\hat{C})$ on obtient $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$

4. En inversant les rôles, on obtient de même $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ac \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2}bc \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$
 et en divisant par $abc \neq 0$ on obtient

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

5. On demande **ensuite** d'interpréter en terme d'aire, on ne l'utilise donc pas ici.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BC} \wedge (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{HC} \text{ et comme } \overrightarrow{BC} // \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH} \text{ donc } \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\| \end{aligned}$$

$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ déterminant de deux vecteurs dans l'espace hum hum, ce n'est pas défini!

On doit comprendre que c'est la restriction du déterminant au plan orienté de sorte que le triangle ABC soit direct.

$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \text{ et } \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \text{ est indirect.}$$

$$\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\| = -\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) \text{ aire du rectangle défini par } \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$$

6. $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ et avec $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}).$$

7. Dans le triangle ABH rectangle en H : $HB^2 + HA^2 = AB^2$

$$\text{avec } HA^2 = h^2 = b^2 \sin(\widehat{C})^2$$

et comme le point $H \in [B, C]$ on a donc $BH = BC - HC = a - b \cos(\widehat{C})$

d'où $BH^2 = a^2 + b^2 \cos(\widehat{C})^2 - 2ab \cos(\widehat{C})$ et finalement

$$\begin{aligned} AB^2 &= b^2 \sin(\widehat{C})^2 + a^2 + b^2 \cos(\widehat{C})^2 - 2ab \cos(\widehat{C}) \\ &= a^2 + b^2 \left(\sin(\widehat{C})^2 + \cos(\widehat{C})^2 \right) - 2ab \cos(\widehat{C}) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$

Partie III

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E . Id_E désigne l'application identité de E .

1. a) Montrer que $\dim \text{Im } f - \dim \text{Im } f^2 = \dim \ker f \cap \text{Im } f$.

On applique le théorème du rang à $f|_{\text{Im}(f)}$ (car $\text{Im}(f)$ est de dimension finie)

L'ensemble de départ est $F = \text{Im}(f)$

$$\dim(F) = \dim \text{Im}(f|_{\text{Im}(f)}) + \dim(\ker f|_{\text{Im}(f)})$$

$$\ker(f|_{\text{Im}(f)}) = \{u \in \text{Im}(f) \mid f(u) = 0\} = \text{Im}(f) \cap \ker(f)$$

$$\text{et } \text{Im}(f|_{\text{Im}(f)}) = \{f(u) \mid u \in \text{Im}(f)\} = \{f(u) \mid u = f(v), v \in E\} = \{f^2(v) \mid v \in E\}$$

$$\text{Donc } \text{Im}(f|_{\text{Im}(f)}) = \text{Im}(f^2)$$

$$\boxed{\dim \text{Im } f = \dim(\ker f \cap \text{Im } f) + \dim(\text{Im } f^2)}$$

b) On applique le théorème du rang à f et à f^2 :

$\dim(E) = \dim \text{Im}(f) + \dim(\ker f)$ et $\dim(E) = \dim \text{Im}(f^2) + \dim(\ker f^2)$ et on fait la différence, d'où

$$\boxed{\dim(\ker f^2) - \dim(\ker f) = \dim(\text{Im } f) - \dim(\text{Im } f^2)}$$

c) En déduire que $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ si et seulement si $\ker f^2 = \ker f$.

On remarque d'abord que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ en effet :

Si $u \in \text{Im}(f^2)$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = f^2(v) = f(f(v)) \in \text{Im}(f)$

et $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ car, si $u \in \ker(f)$ alors $f(u) = 0$ donc $f^2(u) = 0$ (linéarité)

Pour avoir l'inclusion, il faut et suffit donc d'avoir l'égalité des dimensions.

$$\text{Et comme } \dim(\ker f^2) - \dim(\ker f) = \dim(\text{Im } f) - \dim(\text{Im } f^2)$$

$$\text{alors } \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Im } f^2)$$

$$\iff \dim(\ker f^2) = \dim(\ker f) \iff \ker f^2 = \ker f$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{Im } f^2 = \text{Im } f \text{ si et seulement si } \ker f^2 = \ker f.}$$

d) Montrer que $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ si et seulement si $E = \ker f \oplus \text{Im } f$

Double implication :

Si $E = \ker f \oplus \text{Im } f$ montrons que $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$

On a déjà $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ (ci dessus)

Si $u \in \text{Im}(f)$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$

et comme $v \in \ker f \oplus \text{Im } f$ il existe $x \in \ker(f)$ et $y = f(z) \in \text{Im}(f)$ tel que $v = x + y$

Donc $u = f(v) = f(x) + f(y)$ (linéarité) $= f^2(z)$ car $f(x) = 0$

Finalment $u \in \text{Im}(f^2)$ donc $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$ et $\underline{\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)}$

Si $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ montrons que $E = \ker f \oplus \text{Im } f$

On a déjà (th du rang) $\underline{\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f)}$

Montrons que $\ker f \cap \text{Im } f \subset \{0\}$:

Si $u \in \ker f \cap \text{Im } f$ alors il existe v tel que $u = f(v)$ et $f(u) = 0$ donc $f^2(v) = 0$ et $v \in \ker(f^2)$.

Or $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$ donc $\ker f^2 = \ker f$. (question c)) donc $v \in \ker(f)$ et $u = f(v) = 0$

Donc $\ker f \cap \text{Im } f \subset \{0\}$ et $\underline{\ker f \oplus \text{Im } f}$

Finalement $E = \ker f \oplus \text{Im } f$

$\text{Donc } \text{Im } f^2 = \text{Im } f \text{ si et seulement si } E = \ker f \oplus \text{Im } f$

2. On suppose désormais que $f^3 = \text{Id}_E$.

On peut réutiliser ici ce qui a été démontré plus haut ... à condition de vérifier les hypothèses!

a) Soit $u \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ montrons que $u \in \ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$

il existe v tel que $u = (f - \text{Id})(v)$

Donc $(f^2 + f + \text{Id})(u) = (f^2 + f + \text{Id}) \circ (f - \text{Id})(v) = (f^3 - \text{Id})(v) = 0$ car f linéaire

et $u \in \ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$ donc $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$.

b) On a $0 \in \text{Im}(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - \text{Id}_E)$.

Soit $u \in \text{Im}(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - \text{Id}_E) = \{0\}$ alors

on a alors $u \in \ker(f - \text{Id}_E)$ donc $f(u) - u = 0$ donc $f(u) = u$ et $f^2(u) = u$

et $u \in \text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$ (a) donc $0 = f^2(u) + f(u) + u = 3u$ d'où $u = 0$

$\text{et } \text{Im}(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - \text{Id}_E) = \{0\}$

c) Comme $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \cap \ker(f - \text{Id}_E) = \{0\}$ et que $\dim \text{Im}(f - \text{Id}_E) + \dim \ker(f - \text{Id}_E) = \dim(E)$

Et comme $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$. alors

$\underline{\dim(\ker(f^2 + f + \text{Id}_E)) + \dim \ker(f - \text{Id}_E) \geq \dim(E)}$

Si $u \in \ker(f^2 + f + \text{Id}_E) \cap \ker(f - \text{Id}_E)$ et alors $f(u) = u$ et $f^2(u) + f(u) + u = 0$ donc $3u = 0$ et $u = 0$

donc $\underline{\ker(f^2 + f + \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \text{Id}_E) \subset E}$ et comme la dimension est au moins celle de E

$E = \ker(f^2 + f + \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \text{Id}_E)$

d) On suppose qu'il existe un vecteur non nul x dans $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$.

Donc il existe $y \in E$ tel que $x = (f - \text{Id})(y) = f(y) - y$ et $f(x) = f^2(y) - f(y) \dots ?$

On a $y \in E = \ker(f^2 + f + \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \text{Id}_E)$

il existe $u \in \ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$ et $v \in \ker(f - \text{Id}_E)$ tels que $y = u + v$

et $f(y) = f(u) + f(v) = f(u) + v$ car $f(v) - v = 0$

donc $x = f(y) - y = f(u) - u$ et $f(x) = f^2(u) - f(u) = (f - \text{Id})(f(u)) \in \text{Im}(f - \text{Id})$

Par l'absurde : Si $(x, f(x))$ est liée ($x \neq 0$), il existe α tel que $f(x) = \alpha x$ et comme $f^3 = \text{Id}$ on a donc $f^3(x) = \alpha^3 x = x$

c'est à dire $(\alpha^3 - 1)x = 0$ et comme $x \neq 0$, on a donc $\alpha = 1$ et $f(x) = x \in \ker(f - \text{Id})$

Et comme $x \in \text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$ et que $\ker(f^2 + f + \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \text{Id}_E)$, alors $x = 0$

$\text{Donc la famille } (x, f(x)) \text{ est libre.}$

3. On suppose que $\dim E = 3$, $f \neq \text{Id}_E$, et $f^3 = \text{Id}_E$.

et on peut réutiliser les résultats du 2.!!!

a)

4. On suppose que $\dim E = 3$, $f \neq \text{Id}_E$, et $f^3 = \text{Id}_E$.

et on peut réutiliser les résultats du 2.!!!

a) Comme $f \neq \text{Id}_E$ alors $f - \text{Id}_E \neq 0$ et il existe y tel que $x = f(y) - y \neq 0$

Donc il existe un vecteur $x \neq 0$ dans $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$

Donc (2d) $f(x) \in \text{Im}(f - \text{Id})$ et $(x, f(x))$ est libre de deux vecteurs de $\text{Im}(f - \text{Id})$.

Donc $\dim(\text{Im}(f - \text{Id})) \geq 2$ et comme $\dim \text{Im}(f - \text{Id}_E) + \dim \ker(f - \text{Id}_E) = \dim(E) = 3$ alors

$\dim \ker(f - \text{Id}_E) \leq 1$.

Soit z un vecteur tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), z)$ soit une base de E .

Reagrdons la matrice de f dans cette base :

$$f(x) = 0x + 1f(x) + 0z$$

$$f^2(x) = -x - f(x) + 0z \text{ car } x \in \text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$$

$$\text{et } f(z) = ax + bf(x) + cz \text{ (coordonnées inconnues)}$$

$$\text{donc } \text{mat}_{\mathcal{B}} f = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et comme } f^3 = \text{Id} \text{ on a } A^3 = I \text{ et } c^3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & ac - b \\ -1 & 0 & a - b + bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & ac - b \\ -1 & 0 & a - b + bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b - a - c(b - ac) \\ 0 & 1 & c(a - b + bc) - a \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } c = 1 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche alors les solutions $f(u) = u$ avec $\text{mat}_{\mathcal{B}} u = (\alpha, \beta, \gamma)$

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\alpha - \beta + a\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + b\gamma = 0 \end{cases} \text{ système qui a une infinité de solution.}$$

Donc il existe un vecteur non nul dans $\ker(f - \text{Id}_E)$ et $\dim(\ker(f - \text{Id}_E)) = 1$

b) Comme $f^3 = \text{Id}$, si α est valeur propre alors $\alpha^3 = 1$ donc $\alpha = 1$.

Si f est diagonalisable alors la matrice de f dans la base de vecteur propres sera $\text{mat}_{\mathcal{B}} f = I$ et $f = \text{Id}$ FAUX

Donc f n'est pas diagonalisable.

c) Le sous espace associé à 1 est de dimension 1

et $\ker(f^2 + f + \text{Id}_E)$ supplémentaire est de dimension 2

Sur ce sous espace, il faut un endomorphisme dont le cube est Id : rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$

$$\text{Donc } f \text{ vérifiant } \text{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ conviendra.}$$