Épreuve : MATHÉMATIQUES I

Option M, P'

On admet que la suite de terme général

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n,\ n\geq 1,$$

a une limite finie notée γ ("constante d'Euler"), à l'aide de laquelle on se propose de calculer certaines intégrales.

Partie I -

On appelle E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions à valeurs réelles définies sur $]-1,+\infty[$.

I.A -

I.A.1) Montrer que, si une fonction f de E possède les deux propriétés :

$$\forall x>-1 \qquad f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x+1} \tag{1}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=0, \tag{2}$$

alors

$$\forall x>-1 \qquad f(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln n-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\ldots-\frac{1}{x+n}\right) \tag{3}$$

et

$$\forall x>-1 \qquad f(x)=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right) \tag{4}$$

I.A.2) Inversement, montrer que l'égalité (4) permet de définir sur $]-1,+\infty[$ une fonction f qui vérifie (1). Calculer $f(0)$ et $f(-1/2)$ à l'aide de γ.

I.A.3) Montrer que la fonction f précédente est monotone et vérifie (2) (on pourra introduire, pour $x\geq 1$, la partie entière k de x). Quelles sont les limites de f lorsque x tend respectivement vers -1 et vers $+\infty$?

I.A.4) Montrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$.

I.B - En s'inspirant de la question I.A - montrer qu'il existe une fonction unique g de E qui possède les propriétés :

$$\forall x>-1 \qquad g(x+1)-g(x)=-\frac{1}{(x+1)^2} \tag{5}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=0 \tag{6}$$

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Calculer $g(0)$ et $g(-1/2)$. Quelle relation y-a-t-il entre f et g ?

Partie II -

II.A - x désignant un nombre réel, on pose :

$$A(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x dt,\ B(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x\ln t\,dt,\ C(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x(\ln t)^2dt. \tag{7}$$

II.A.1) Pour quelles valeurs de x, les intégrales $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ convergent-elles ?

II.A.2) On pose alors : $\psi(x)=B(x)/A(x)$, $\chi(x)=C(x)/A(x)$ et $\eta(x)=\chi(x)-\psi^2(x)$. Quel est le signe de $\eta(x)$?

II.B -

II.B.1) Vérifier que, $\forall x>-1 \qquad A(x+1)=(x+1)A(x)$.

II.B.2) Trouver une relation entre $B(x+1)$, $B(x)$ et $A(x)$ et en déduire que ψ vérifie (1).

II.B.3) Trouver une relation entre $C(x+1)$, $C(x)$ et $B(x)$ et en déduire que η vérifie (5).

II.C -

II.C.1) Montrer que $B(0) > -1$.

II.C.2) Montrer qu'on peut écrire :

$$B(0) = \int_1^{+\infty} \left(e^{-u} - \frac{1}{u^2} e^{-1/u}\right) \ln u \ du. \qquad (8)$$

II.C.3) Étudier le signe de $u - 1/u - 2\ln u$ pour $u \geq 1$ et en déduire que $B(0) < 0$.

II.C.4) Déterminer les signes de $\psi(n)$ et de $B(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III -

On se propose d'établir que ψ vérifie (2).

III.A - Pour $x > 0$, on pose $\phi(x) = \ln x - x$. Étudier les variations de la fonction ϕ.

III.B - Soit h une fonction à valeurs réelles, continue dans $]0, +\infty[$, et telle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{\phi(x)} h(x) dx \qquad (9)$$

soit absolument convergente. On désigne par α et T des nombres réels tels que $0 < \alpha < 1$ et $T \geq 1$.

III.B.1) Montrer que l'intégrale $\int_{1+\alpha}^{+\infty} e^{T\phi(x)} h(x) dx$ converge et qu'il existe un nombre M, indépendant de α et T, tel que :

$$\left| \int_{1+\alpha}^{+\infty} e^{T\phi(x)} h(x) dx \right| \leq M e^{(T-1)\phi(1+\alpha)} \qquad (10)$$

III.B.2) Donner un résultat analogue pour $\int_0^{1-\alpha} e^{T\phi(x)} h(x) dx$.

III.B.3) Soit β tel que $0 < \beta < \alpha$. Montrer que

$$\int_1^{1+\alpha} e^{T\phi(x)} dx \geq \beta e^{T\phi(1+\beta)} \qquad (11)$$

III.B.4) Donner un résultat analogue pour $\int_{1-\alpha}^{1} e^{T\phi(x)} dx$.

III.C - On suppose de plus que $h(1) = 0$.

III.C.1) Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \quad 0 < \alpha < 1$, tel que

$$\left| \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{T\phi(x)} h(x) dx \right| \leq \varepsilon \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} e^{T\phi(x)} dx \qquad (12)$$

III.C.2) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{T\phi(x)} h(x) dx \qquad (13)$$

est négligeable devant

$$\int_0^{+\infty} e^{T\phi(x)} dx \qquad (14)$$

lorsque T tend vers $+\infty$.

III.D - On suppose $x > 0$. Effectuer dans les intégrales $A(x)$ et $B(x)$ le changement de variable $t = xu$ et démontrer que ψ vérifie (2).

III.E - Déduire des parties I et II une expression de $\psi(x)$ et calculer $B(0)$ à l'aide de γ.

Partie IV -

IV.1) On suppose $x > 0$. Effectuer dans l'intégrale $C(x)$ le changement de variable $t = xu$ et montrer que η vérifie (6).

IV.2) En déduire l'expression de $\eta(x)$ et de $\chi(x)$. Calculer $C(0)$ et $C(-1/2)$ à l'aide de γ (on admettra que $A(-1/2) = \sqrt{\pi}$).

••• FIN •••