

I. Calculs préliminaires

On rappelle qu'une suite réelle bornée, est convergente si et seulement si elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence finie .

Pour $f \in H_0$, on pose $F_f(x) = \int_{-\infty}^x f(u)e^{-u^2/2} du$ et $F_1(x) = \int_0^x f(u)e^{-u^2/2} du$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Montrons que F_f est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_f(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(u)e^{-u^2/2} du}_{C^{te}} + \int_0^x f(u)e^{-u^2/2} du$, et comme $u \mapsto f(u)e^{-u^2/2}$ est

continue sur \mathbb{R} , alors F_f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $F_f(x) = f(x)e^{-x^2/2} > 0$. Donc F_f est strictement croissante sur \mathbb{R} et réalise un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} F_f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} F_f(x)[$.

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(u)e^{-u^2/2} du = 0$ (reste d'une intégrale convergente) et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$, donc F_f est un

C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

2. Montrons l'existence de φ fonction définie sur \mathbb{R} telle que : (*) $\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$.

On pose $\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_f(\varphi(x)) = F_1(x)$, donc :

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

Unicité : si ψ est une autre fonction qui vérifie aussi (*), alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$F_f(\varphi(x)) = F_1(x) = F_f(\psi(x))$ et comme F_f est bijective (donc injective) il en résulte que $\varphi(x) = \psi(x)$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où l'unicité .

3. Par $\varphi = F_f^{-1} \circ F_1$, on a φ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , comme composée deux C^1 -difféomorphismes .et que φ est strictement croissante car F_f et F_1 le sont .

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_1(x) = F_f(\varphi(x))$ et par dérivation (toutes les fonctions sont de classe C^1), on obtient : $e^{-x^2/2} = \varphi'(x)f(\varphi(x))e^{-\varphi^2(x)/2}$. D'où

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \varphi^2(x)/2 = -\frac{x^2}{2}.$$

Par la relation : $F_1(\varphi^{-1}(x)) = F_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient (après dérivation) :

$(\varphi^{-1})'(x)e^{-(\varphi^{-1}(x))^2/2} = F_f'(x) = f(x)e^{-x^2/2}$ et puis

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) - (\varphi^{-1}(x))^2/2 = \ln(f(x)) - \frac{x^2}{2}.$$

D'où :

$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{(\varphi^{-1}(x))^2}{2} = -\frac{x^2}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

5. $h \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $x \mapsto h(x)f(x)e^{-x^2/2}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2} du$.

Dans la seconde intégrale, on fait le changement de variable $u \mapsto x = \varphi(u)$ qui est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , il vient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \underbrace{e^{-(\varphi^{-1}(x))^2/2} (\varphi^{-1})'(x)}_{=f(x)e^{-x^2/2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)e^{-x^2/2} dx$$

D'où le résultat demandé .

6. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un C^1 -difféomorphisme strictement croissant, soit $a > \varphi^{-2}(0) = \varphi^{-1} \circ \varphi^{-1}(0)$ tel que $A = \varphi(a) > 0$, alors pour tout $x \geq A$, on a : $x + 1 > x \geq A$ et pour tout $u \in [x, x + 1]$, $0 < \varphi(x) \leq \varphi(u) \leq \varphi(x + 1)$, donc $\varphi^2(x) \leq \varphi^2(u) \leq \varphi^2(x + 1)$.

D'autre part : $x^2 \leq u^2 \leq (x + 1)^2$ et donc $e^{-(x+1)^2/2} \leq e^{-u^2/2} \leq e^{-x^2/2}$.

D'où $\varphi^2(u)e^{-u^2/2} \geq \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}$ et puis $\int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \geq \int_x^{x+1} \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2} du = \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}$.

En conclusion :

$$\exists A > 0, \forall x \geq A; \int_x^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \geq \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2} \quad (i)$$

7. Comme en 6., on prend $a_1 < \varphi^{-2}(0)$, tel que $A_1 = \varphi(a_1) < 0$ alors $\varphi(A_1) < 0$. Pour tout $x \leq A_1$, on a : $x - 1 < x \leq A_1 < 0$ et pour tout $u \in [x - 1, x]$, on a $\varphi(x - 1) \leq \varphi(u) \leq \varphi(x) \leq \varphi(A_1) < 0$, donc : $0 < \varphi^2(x) \leq \varphi^2(u) \leq \varphi^2(x - 1)$. D'autre part : $x^2 \leq u^2 \leq (x - 1)^2 = (-|x| - 1)^2 = (|x| + 1)^2$, donc $e^{-(|x|+1)^2/2} \leq e^{-u^2/2} \leq e^{-x^2/2}$ pour tout $u \in [x - 1, x]$ et puis $\varphi^2(x)e^{-(|x|+1)^2/2} \leq \varphi^2(u)e^{-u^2/2}$.

Par intégration, on a :

$$\varphi^2(x)e^{-(|x|+1)^2/2} \leq \int_{x-1}^x \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \quad \text{pour tout } x \leq A_1. \quad (ii)$$

Par l'inégalité (i) de la question 6., on a : $\varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2} \leq \int_x^{+\infty} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du$ pour tout $x \geq A$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du = 0$ (reste d'une intégrale convergente), il existe $B_1 > A$ tel que : $\forall x \geq B_1, \int_x^{+\infty} \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \leq 1$ et donc $\varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2} \leq 1$ et puis

$$(*) \quad |\varphi(x)| \leq e^{(x+1)^2/4} \quad \text{pour tout } x \geq B_1$$

De même il existe $B_2 < A_1 < 0$ tel que : $\forall x \leq B_2, 0 < \int_{x-1}^x \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \leq \int_{-\infty}^x \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \leq 1$

(car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du = 0$), et par (ii), on a :

$$\varphi^2(x)e^{-(|x|+1)^2/2} \leq \int_{x-1}^x \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \leq \int_{-\infty}^x \varphi^2(u)e^{-u^2/2} du \leq 1 \quad \text{pour tout } x \leq B_2 \text{ et puis :}$$

$$(**) \quad |\varphi(x)| \leq e^{(|x|+1)^2/4}.$$

Par (*) et (**), il existe $A = \max(B_1, -B_2) > 0$ tel que : pour tout réel $|x| \geq A, |\varphi(x)| \leq e^{(|x|+1)^2/4}$.

8. Primitive de $u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2}$:

On remarque que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$(-\varphi(u)e^{-u^2/2})' = -\varphi'(u)e^{-u^2/2} + u\varphi(u)e^{-u^2/2} \text{ et } (ue^{-u^2/2})' = 1 \cdot e^{-u^2/2} - u^2e^{-u^2/2}, \text{ donc :}$$

$$\Psi : u \mapsto (u - \varphi(u)) e^{-u^2/2} \text{ est une primitive de la fonction continue } u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2}.$$

9. Calcul de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2} du$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| (u - \varphi(u)) e^{-u^2/2} \right| &\leq e^{-u^2/2} (|u| + |\varphi(u)|) \\
&\leq e^{-u^2/2} \left(|u| + e^{(|u|+1)^2/4} \right) \quad \text{pour } |u| \text{ assez grand} \\
&\leq e^{-u^2/2} |u| + e^{(|u|+1)^2/4 - u^2/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } e^{-u^2/2} |u| + e^{(|u|+1)^2/4 - u^2/2} &= e^{-\frac{1}{2}u^2} |u| + \exp\left(\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}|u| + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}u^2\right) \\
&= e^{-\frac{1}{2}u^2} |u| + \exp\left(-\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}|u| + \frac{1}{4}\right) \xrightarrow{|u| \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } \lim_{u \rightarrow \infty} (u - \varphi(u)) e^{-u^2/2} = 0 \text{ et par suite } I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2} du \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(u - \varphi(u)) e^{-u^2/2} \right]_{u=-x}^{u=x} = 0
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$I = 0$$

II. Une inégalité intéressante :

On note $E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2} du$ et $\Phi(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2} du$ où $f \in H_0$.

10. Remarquons que les fonctions sous les signes intégrales sont continues sur \mathbb{R} .

On rappelle que la fonction $\alpha : x \mapsto x \ln(x)$ est bornée sur $]0, 1]$ (continue sur $]0, 1]$ et admet un prolongement par continuité en 0) et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $0 < \ln(x) \leq x$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2(1+x)} = 0$, il existe $r > 0$ tel que $0 < \frac{r}{2(1+r)} < \rho$.

$$\begin{aligned}
\text{Posons } \|\alpha\|_{\infty} = \sup_{x \in]0, 1]} |\alpha(x)|. \text{ Pour } u \in \mathbb{R}, \text{ on a : } |rf(u) \ln(f(u))| &= |f(u) \ln(f^r(u))| \\
&\leq \begin{cases} r \|\alpha\|_{\infty} & \text{si } f(u) \leq 1 \\ f^{(1+r)}(u) & \text{si } f(u) > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } |rf(u) \ln(f(u))| &\leq \max(r \|\alpha\|_{\infty}; f(u)^{(1+r)}) \\
&\leq r \|\alpha\|_{\infty} + (f(u))^{(1+r)} = r \|\alpha\|_{\infty} + \frac{1}{\rho^{1+r}} e^{(1+r)(\frac{1}{2}-\rho)u^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et puis } \left| rf(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2} \right| &\leq (r \|\alpha\|_{\infty} + f^{1+r}(u)) e^{-u^2/2} \\
&= r \|\alpha\|_{\infty} e^{-u^2/2} + \frac{1}{\rho^{1+r}} e^{(1+r)(\frac{1}{2}-\rho)u^2} e^{-u^2/2} \\
&= r \|\alpha\|_{\infty} e^{-u^2/2} + \rho^{-1-r} \exp\left(-u^2 \left((1+r)\rho - \frac{r}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or l'application $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est intégrable sur \mathbb{R} et $u \mapsto \exp\left(-u^2 \left((1+r)\rho - \frac{r}{2}\right)\right)$ est intégrable sur \mathbb{R} car $(1+r)\rho - \frac{r}{2} > 0$ et donc $\exp\left(-u^2 \left((1+r)\rho - \frac{r}{2}\right)\right) = \frac{0}{|u| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u^2}\right)$. D'où $u \mapsto r.f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2}$

est intégrable sur \mathbb{R} et par suite $u \mapsto f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Par la question 7. , pour $|u| \geq A$, on a : $|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}$, donc :

$$\begin{aligned}
|u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2} &\leq u^2 e^{-u^2/2} + 2|u\varphi(u)| e^{-u^2/2} + (\varphi(u))^2 e^{-u^2/2} \\
&\leq 2 \left(u^2 e^{-u^2/2} + (\varphi(u))^2 e^{-u^2/2} \right) \\
&\leq 2u^2 e^{-u^2/2} + e^{(|u|+1)^2/4} e^{-u^2/2} = 2u^2 e^{-u^2/2} + e^{-(|u|+1)^2/4}
\end{aligned}$$

et comme les fonctions $u \mapsto u^2 e^{-u^2/2}$ et $u \mapsto e^{-(|u|+1)^2/4}$ sont intégrables sur \mathbb{R} (elles sont négligeables devant $\frac{1}{u^2}$ au voisinage de ∞), il en résulte que $u \mapsto |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

11. Posons $h = \ln \circ f$, alors h est continue (composée de deux fonctions continues) et intégrable sur \mathbb{R} (d'après la question 10.). Par la question 5.) on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2} du &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) h(u) e^{-u^2/2} du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u)) e^{-u^2/2} du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u))) e^{-u^2/2} du
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \ln(f(u)) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u))) e^{-u^2/2} du$$

12. On utilise la relation $\ln(f(\varphi(u))) = \frac{1}{2}\varphi^2(u) - \frac{u^2}{2} - \ln(\varphi'(u))$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned} E(f) - \Phi(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}du - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2} - \frac{1}{2}(u - \varphi(u))^2 e^{-u^2/2} \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln(f(\varphi(u))) - \frac{1}{2}u^2 + u\varphi(u) - \frac{1}{2}\varphi^2(u) \right) e^{-u^2/2}du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-u^2 + u\varphi(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}du \end{aligned}$$

On a que $I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1) e^{-u^2/2}du = 0$. (d'après la question 9.), donc :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-u^2 + u\varphi(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}du + I = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}du.$$

En conclusion :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}du \quad (1)$$

13. Relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$:

D'après la question 12.) $E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}du$, or pour tout $x > 0$,

$$-\ln(x) + x - 1 = - \left(\underbrace{\ln(x) - (x - 1)}_{\leq 0} \right) \geq 0, \text{ donc pour tout } u \in \mathbb{R}, (-1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u))) \geq 0 \text{ et}$$

par suite $E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}du \geq 0$.

En conclusion :

$$E(f) \geq \Phi(f).$$

14. L'application $u \mapsto (-1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}$ est continue et positive sur \mathbb{R} , donc :

$$\begin{aligned} E(f) = \Phi(f) &\Leftrightarrow E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2}du \\ &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, (-1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u))) e^{-u^2/2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, -1 + \varphi'(u) - \ln(\varphi'(u)) = 0 \\ &\text{Si l'on pose } X = \varphi'(u), \text{ on a :} \end{aligned}$$

$$E(f) = \Phi(f) \Leftrightarrow -1 + X + \ln(X) = 0 \Leftrightarrow \ln(X) = X - 1 \Leftrightarrow X = 1.$$

Donc $E(f) = \Phi(f) \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u) = 1 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}, \varphi(u) = u + c$.

Par $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi'(u)f(\varphi(u))e^{-\varphi^2(u)/2} = e^{-u^2/2}$ (d'après la question 4.), on a :
 $\forall u \in \mathbb{R}, f(u + c)e^{-(u+c)^2/2} = e^{-u^2/2}$, donc $\forall u \in \mathbb{R}, f(u)e^{-u^2/2} = e^{-(u-c)^2/2}$ et puis :

$$f(u) = e^{-(u-c)^2/2}e^{u^2/2} = e^{-c^2/2}e^{cu} \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}$$

Réciproquement : toute fonction f telle que $f(u) = e^{-c^2/2}e^{cu}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ est bien dans H_0 et vérifie $E(f) = \Phi(f)$.

En conclusion : Les fonctions $f \in H_0$ cherchées sont de la forme : $u \mapsto f(u) = e^{-c^2/2}e^{cu}$ où c est une constante réelle .

III. Extension aux fonctions positives

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$, $f_n(u) = \frac{n-1}{n}g(u) + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$ car g est positive sur \mathbb{R} .

D'autre part : $f_n(u) = g(u) + \frac{1}{n}(1-g(u))$, donc, si $\boxed{g(u) \geq 1}$, alors: $\begin{cases} f_n(u) \leq g(u) \\ f_n(u) = \frac{n-1}{n}g(u) + \frac{1}{n} \geq \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1 \end{cases}$
donc

$$1 \leq f_n(u) \leq g(u) \quad (*)$$

De même si, pour $n > 1$, $f_n(u) \geq 1$, alors $\frac{n-1}{n}g(u) + \frac{1}{n} \geq 1$, donc $g(u) \geq \frac{n}{n-1}(1 - \frac{1}{n}) = 1$ et par suite $g(u) \geq 1$.

15. L'application $\Psi : x \mapsto \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0; +\infty[$, et on a :

$\|\Psi\|_{\infty, [0;1]} = \sup_{x \in [0,1]} |\Psi(x)| = \left| \Psi\left(\frac{1}{e}\right) \right| = \frac{1}{e}$. Sur $]1, +\infty[$, Ψ est strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $n > 1$ et $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\Psi(f_n(u))| \leq \begin{cases} \frac{1}{e} & \text{si } f_n(u) \leq 1 \\ \Psi(g) & \text{si } f_n(u) \geq 1 \quad (\Leftrightarrow g(u) \geq 1) \end{cases}$$

donc :

$$|\Psi(f_n(u))| \leq \frac{1}{e} + \Psi(g)$$

Comme $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers g car, pour $n \in \mathbb{N}^*$, avec $n > 1$ et $u \in \mathbb{R}$:

$|f_n(u) - g(u)| = \frac{1}{n}|1 - g(u)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et que Ψ est continue sur \mathbb{R}_+ , il en résulte que $(\Psi \circ f_n)_n$ converge simplement vers $\Psi \circ g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et par suite $u \mapsto \left(\Psi \circ f_n(u) \cdot e^{-u^2/2} \right)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $u \mapsto \Psi \circ g(u) \cdot e^{-u^2/2}$ sur \mathbb{R} . De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avec $n > 1$, $\forall u \in \mathbb{R}$:

$\left| \Psi \circ f_n(u) \cdot e^{-u^2/2} \right| \leq \left(\frac{1}{e} + \Psi(g) \right) e^{-u^2/2} = \frac{1}{e} e^{-u^2/2} + \Psi(g) e^{-u^2/2}$ et $u \mapsto \frac{1}{e} e^{-u^2/2} + \Psi(g) e^{-u^2/2}$ est intégrable sur \mathbb{R} , comme somme de deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} . On déduit alors par le théorème de convergence dominée, que :

$$E(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(g) e^{-u^2/2} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(f_n) e^{-u^2/2} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} E(f_n).$$

16. Avant de répondre à cette question, justifions d'abord que ψ_j est définie sur \mathbb{R} :

- La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} , vers $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in \mathbb{R}$;
 $\begin{cases} 0 < f_n(u) \leq g(u) + 1 \\ |f_n(u) - g(u)| \leq g(u) + 1 \end{cases}$ et que $u \mapsto (g(u) + 1) e^{-u^2/2}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R} , donc par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\psi_j(x)} |g(u) - f_n(u)| e^{-u^2/2} du = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\psi_j(x)} f_n(u) e^{-u^2/2} du. \quad (I)$$

- Montrons maintenant que, pour $x \in \mathbb{R}$, $(\varphi_n(x))_n$ est bornée, pour conclure que ψ_j est définie sur \mathbb{R} , pour $j = 1$ et $j = 2$:

▷ Supposons que $(\varphi_n(x))_n$ n'est pas majorée, il existe alors une suite $(n_k)_k$ d'entiers strictement croissante telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{n_k}(x) = +\infty$.

On a :

$$\int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} f_{n_k}(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du \quad (III)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} f_{n_k}(u)e^{-u^2/2}du - \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}du \right| \leq \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} |f_{n_k}(u) - g(u)| e^{-u^2/2}du + \int_{\varphi_{n_k}(x)}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}du$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{n_k}(u) - g(u)| e^{-u^2/2}du + \int_{\varphi_{n_k}(x)}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}du$$

Or $\lim_{k \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_{n_k}(u) - g(u)| e^{-u^2/2}du = 0$ et $\lim_{k \rightarrow -\infty} \int_{\varphi_{n_k}(x)}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}du = 0$ (reste d'une intégrale conver-

gente), donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} f_{n_k}(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}du$ et par (A) : $0 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2}du -$

$$\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du - \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du = \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2}du > 0$$
 ce qui est absurde .D'où $(\varphi_n(x))_n$

est majorée .

▷ Supposons que $(\varphi_n(x))_n$ n'est pas minorée, il existe alors une suite $(n_k)_k$ d'entiers strictement croissante telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{n_k}(x) = -\infty$.

On a :

$$\int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} f_{n_k}(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du \quad (III)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} f_{n_k}(u)e^{-u^2/2}du \right| \leq \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} (g(u) + 1)e^{-u^2/2}du \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Mais $\int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} f_{n_k}(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du$ et par (III) : $0 = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du > 0$ ce qui est absurde .D'où

$(\varphi_n(x))_n$ est minorée .

En Conclusion : $(\varphi_n(x))_n$ est bornée, donc $\limsup \varphi_n(x)$ et $\liminf \varphi_n(x)$ sont finies, et apr suite ψ_1 et ψ_2 sont définies sur \mathbb{R} .

Montrons $\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du$ pour $j = 1, 2$:

Par définitions de ψ_j , $j = 1; 2$, pour $x \in \mathbb{R}$ donné, il existe deux suites d'entiers $(n_k)_k$ et $(n'_k)_k$ strictement croissante telle que : $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(x) = \psi_1(x)$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n'_k}(x) = \psi_2(x)$.

Donc :

$$\left| \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} g(u)e^{-u^2/2}du - \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du \right| = \left| \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} g(u)e^{-u^2/2}du - \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} f_{n_k}(u)e^{-u^2/2}du \right| \quad (II)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} |g(u) - f_{n_k}(u)| e^{-u^2/2}du$$

Comme $\varphi_{n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \psi_1(x)$, par (I) et (II), il vient :

$$\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}du = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\varphi_{n_k}(x)} g(u)e^{-u^2/2}du = \int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u)e^{-u^2/2}du.$$

De même $\varphi_{n'_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \psi_2(x)$, par (I) et (II), on a :

$$\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\varphi_{n'_k}(x)} g(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{\psi_2(x)} g(u) e^{-u^2/2} du$$

En conclusion :

$$\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \quad \text{pour } j = 1 \text{ et } j = 2$$

17. Montrons que ψ_j est strictement croissante et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_j(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_j(x) = b$ pour $j = 1$ et $j = 2$:

• Soient x et x' deux réels tels que : $x < x'$, alors, par la question 16.) :

$$\begin{aligned} \int_{\psi_j(x)}^{\psi_j(x')} g(u) e^{-u^2/2} du &= \int_{-\infty}^{\psi_j(x')} g(u) e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du \\ &= \int_{-\infty}^{x'} e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \\ &= \int_x^{x'} e^{-u^2/2} du > 0 \quad \text{car } u \mapsto e^{-u^2/2} \text{ est continue et strictement positive} \end{aligned}$$

donc $\int_{\psi_j(x)}^{\psi_j(x')} g(u) e^{-u^2/2} du > 0$ et puisque $u \mapsto g(u) e^{-u^2/2}$ est continue et positive, il en résulte que $\psi_j(x) < \psi_j(x')$ et par suite ψ_j est strictement croissante sur \mathbb{R} .

• Pour $j = 1$ et $j = 2$, ψ_j est strictement croissante, donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_j(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

▷ On suppose $a \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$, alors : $0 \leq \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du = \int_a^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du$
car $g(u) = 0$ pour tout $u \in]-\infty, a[$, et puisque $u \mapsto g(u) e^{-u^2/2}$ est continue et positive et que $\int_a^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du \geq 0$, il en résulte que $\psi_j(x) \geq a$ car sinon.....et puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_j(x) \geq a$.

Supposons $\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_j(x) > a$, il existe alors $x_0 \in]a, \ell[$ tel que $g(x_0) > 0$ et puis par continuité de $u \mapsto g(u) e^{-u^2/2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$, $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset]a, \ell[$ et $\forall u \in [\alpha, \beta]; g(u) e^{-u^2/2} > 0$, donc $0 < \int_{\alpha}^{\beta} g(u) e^{-u^2/2} du \leq \int_a^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ ce qui est impossible. On en déduit alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_j(x) = a$.

▷ On suppose $a = -\infty$, il existe alors $c \in \mathbb{R}$ tel que : $g(u) > 0$ pour tout $u \leq c$. Soit $u \leq c$, alors $\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (**). Si $\ell = \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_j(x) > a$ ($\ell \in \mathbb{R}$), alors $\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\ell} g(u) e^{-u^2/2} du > 0$ car $u \mapsto g(u) e^{-u^2/2}$ est continue et strictement positive au voisinage de $-\infty$, ce qui contredit (**), donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_j(x) = a$

▷ De même pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_j(x) = b$:

On suppose $b < +\infty$, soit $x > b$, alors :

$$\int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u) e^{-u^2/2} du = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \int_{\psi_j(x)}^b \underbrace{g(u)e^{-u^2/2} du}_{\geq 0} &= \int_{-\infty}^b g(u)e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u)e^{-u^2/2} du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^{\psi_j(x)} g(u)e^{-u^2/2} du, \text{ } g \text{ est nulle sur }]b; +\infty[\\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \\
 &= \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du > 0
 \end{aligned}$$

d'où $\psi_j(x) \leq b$. et puis $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_j(x) \leq b$.

Comme ψ_j est croissante , il existe $c > 0$ tel que : $\psi_j(x) \leq \ell$ pour tout $x \geq c$.

Si $\ell < b$, il existe alors $x_0 \in]\ell, b[$ tel $g(u) > 0$, et par continuité de $u \mapsto g(u)e^{-u^2/2}$, il existe $[\alpha, \beta] \subset]\ell, b[$ avec $\alpha < \beta$ et $x_0 \in]\alpha, \beta[$ tel que : $g(u)e^{-u^2/2} > 0$ pour tout $u \in [\alpha, \beta]$. Soit alors $x > c$, on a :

$$0 < \int_{\alpha}^{\beta} g(u)e^{-u^2/2} du \leq \int_{\psi_j(x)}^b g(u)e^{-u^2/2} du = \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ , ce qui est impossible, don}$$

$\ell = b$.

Si $b = +\infty$, avec un raisonnement analogue au précédent, on montre que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_j(x) = +\infty.$$

Conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_j(x) = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi_j(x) = b$$

18. ψ_1 est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc $\psi_1(x^+)$ et $\psi_1(x^-)$ existent dans \mathbb{R} , avec $\psi_1(x^+) \geq \psi_1(x^-)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \in D$, alors $\psi_1(x^+) > \psi_1(x^-)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $D_{\frac{1}{N}} = \{x \in D / \psi_1(x^+) - \psi_1(x^-) > \frac{1}{N}\}$, montrons que $card(D_{\frac{1}{N}}) \leq \frac{1}{N}(b-a)$ où a et b sont définis dans la question 17.)

Supposons a et b sont finis, comme $\psi_1(\mathbb{R}) \subset [a, b]$, alors :

$$(b-a) \geq \sum_{x \in D_{\frac{1}{N}}} \underbrace{(\psi_1(x^+) - \psi_1(x^-))}_{\geq \frac{1}{N}} \geq card(D_{\frac{1}{N}}) \cdot \frac{1}{N}, \text{ donc } card(D_{\frac{1}{N}}) \leq N(b-a).$$

Si a ou b est infini, l'inégalité précédente est triviale .

19. Ce que je peux dire c'est que $D = \bigcup_{N \geq 1} D_{\frac{1}{N}}$, donc D est dénombrable .

20. Montrons que si $\psi_1(x) < \psi_2(x)$, alors g est nulle sur $[\psi_1(x); \psi_2(x)]$:

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(u)e^{-u^2/2} du &= \int_{-\infty}^{\psi_2(x)} g(u)e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u)e^{-u^2/2} du \\
 &= \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = 0.
 \end{aligned}$$

Comme $u \mapsto g(u)e^{-u^2/2}$ est continue , positive et d'intégrale nulle sur $[\psi_1(x); \psi_2(x)]$, avec : $\psi_1(x) < \psi_2(x)$, on déduit que g est nulle sur $[\psi_1(x); \psi_2(x)]$.

21. Supposons que $g(\psi_1(x)) > 0$, on a alors $\lim_{y \rightarrow x, y < x} \psi_1(y) = \psi_1(x^-) \leq \psi_1(x)$ car ψ_1 est strictement croissante .

Soit $y < x$, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\psi_1(y)}^{\psi_1(x)} g(u)e^{-u^2/2} du &= \int_{-\infty}^{\psi_1(x)} g(u)e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^{\psi_1(y)} g(u)e^{-u^2/2} du \\ &= \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du - \int_{-\infty}^y e^{-u^2/2} du \quad , \\ &= \int_y^x e^{-u^2/2} du \xrightarrow{y \rightarrow x, y < x} 0, \end{aligned}$$

donc $\int_{\psi_1(x^-)}^{\psi_1(x)} g(u)e^{-u^2/2} du = 0$.

Si $\psi_1(x^-) < \psi_1(x)$, comme à la question 20., on a : g est nulle sur $[\psi_1(x^-), \psi_1(x)]$, en particulier $g(\psi_1(x)) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. D'où $\psi_1(x^-) = \psi_1(x)$.

De même $\psi_1(x^+) = \psi_1(x)$, donc ψ_1 est continue en x .

22. Supposons que $\psi_1(x) \neq \psi_2(x)$, alors $\psi_1(x) < \psi_2(x)$ et par la question 20. g est nulle sur $[\psi_1(x), \psi_2(x)]$. Soit $0 < \varepsilon \leq \psi_2(x) - \psi_1(x)$, comme ψ_1 est continue en x , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in]x, x + \eta]; \quad 0 < \psi_1(x) < \psi_1(y) \leq \psi_1(x) + \varepsilon \leq \psi_2(x),$$

donc, pour $y \in]x, x + \eta]; \quad 0 < \int_x^y e^{-u^2/2} du = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_1(y)} g(u)e^{-u^2/2} du \leq \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} g(u)e^{-u^2/2} du = 0$ ce qui est impossible, d'où

$$\psi_1(x) = \psi_2(x)$$

23. Je crois qu'il y'a une erreur dans l'énoncé : Si l'on prend par exemple $\psi : x \mapsto x$ qui est continue et strictement croissante sur R , $\varepsilon = 1$ (ici $C = R$) et $K = \{1, 9\}$, alors, avec les conditions de l'énoncé, on a : $x_0 = 1$ et $x_1 = 9$ ($q = 0$) et donc $K \subset [x_0, x_1]$, mais pour $u = 1$ et $v = 9$, on a : $\psi(v) - \psi(u) = 9 - 1 = 8 > 1 = \varepsilon$.

Peut-être, on demande l'existence de des x_j dans C tels que , au lieu des x_j dans K tels que

Dans la suite les x_j seront pris dans C .

Soit $\varepsilon > 0$, ψ_1 étant continue sur le compact K , donc uniformément continue sur K , il existe alors $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in K, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |\psi_1(x) - \psi_1(y)| \leq \varepsilon \quad (i)$$

Soit $u \in K \subset C$, il existe $\alpha_u, \beta_u \in C$ tel que : $\begin{cases} [\alpha_u, \beta_u] \subset C \\ 0 < \beta_u - \alpha_u \leq \eta \\ u \in]\alpha_u, \beta_u[\end{cases}$.

Alors $K \subset \bigcup_{u \in K}]\alpha_u, \beta_u[$, donc $(] \alpha_u, \beta_u [)_{u \in K}$ est un recouvrement d'ouverts du compact K , on peut alors extraire un recouvrement fini de K : $\exists q \in \mathbb{N}$, tel que $K \subset \bigcup_{0 \leq j \leq q}]\alpha_{u_j}, \beta_{u_j}[$.

Posons $x_{2j} = \alpha_{u_j}$ et $x_{2j+1} = \beta_{u_j}$, alors :

a) $K \subset \bigcup_{0 \leq j \leq q}]x_{2j}, x_{2j+1}[\subset \bigcup_{0 \leq j \leq q} [x_{2j}, x_{2j+1}]$

b) Pour $j \in \{0, \dots, q\}$ et $x_{2j} \leq u \leq v \leq x_{2j+1}$, on a, d'après (i) : $0 \leq \psi_1(v) - \psi_1(u) \leq \varepsilon$
D'où le résultat demandé .

24. On sait que, voir question 16. que $(\varphi_n(x))_n$ est bornée.

Pour chaque $x \in C$, on a ψ_1 est continue en x et par la question 22.) $\psi_1(x) = \psi_2(x)$, donc la suite $(\varphi_n(x))_n$ admet une seule valeur d'adhérence finie $\psi_1(x)$, et par conséquent converge vers $\psi_1(x)$. D'où $(\varphi_n)_n$ converge simplement sur C vers ψ_1 . Pour $x \in K$, d'après 23. (a), il existe $j \in \{0, \dots, q\}$ tel que $x \in [x_{2j}, x_{2j+1}]$ et puis par 22. (b) :

$$\begin{aligned}
|\psi_1(x) - \varphi_n(x)| &\leq \underbrace{|\psi_1(x) - \psi_1(x_{2j})|}_{\leq \varepsilon} + |\psi_1(x_{2j}) - \varphi_n(x)| \\
&\leq \varepsilon + |\psi_1(x_{2j}) - \varphi_n(x)|
\end{aligned}$$

Comme $(\varphi_n)_n$ converge simplement vers ψ_1 sur C , il existe $n_j \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\begin{cases} \forall n \geq n_j; |\psi_1(x_{2j}) - \varphi_n(x_{2j})| \leq \varepsilon \\ \forall n \geq n_j; |\psi_1(x_{2j+1}) - \varphi_n(x_{2j+1})| \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc . } |\psi_1(x_{2j}) - \varphi_n(x)| &\leq \underbrace{|\psi_1(x_{2j}) - \varphi_n(x_{2j})|}_{\leq \varepsilon} + |\varphi_n(x_{2j}) - \varphi_n(x)| \\
&\leq \varepsilon + \varphi_n(x) - \varphi_n(x_{2j}) \\
&\leq \varepsilon + \varphi_n(x_{2j+1}) - \varphi_n(x_{2j}) \quad (\varphi_n \text{ est une fonction croissante}).
\end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n(x_{2j+1}) - \varphi_n(x_{2j})) = \psi_1(x_{2j+1}) - \psi_1(x_{2j}) \leq \varepsilon$, il exist donc $n'_j \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq n'_j; \quad 0 \leq \varphi_n(x_{2j+1}) - \varphi_n(x_{2j}) \leq 2\varepsilon.$$

En conclusion : Pour $N_0 = \max_{0 \leq j \leq q} (n_j + n'_j) \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall n \geq N_0, \forall x \in K; \quad |\psi_1(x) - \varphi_n(x)| \leq 4\varepsilon$$

c'est à dire $(\varphi_n)_n$ converge uniformément sur K vers ψ_1 .

25. Une rectification de l'énoncé : On montre, que **pour tout** $A > 0$, il existe n_0 tel que :

$$\forall m \geq n_0 : \quad \sup_{u \in [-A, A]} |\varphi_m(u)| \leq |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1.$$

Soit $A > 0$ et $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, par définition de ψ_1 et ψ_2 , il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall m \geq n_0; \quad \begin{cases} \varphi_m(A) &\leq \psi_2(A) + \varepsilon \\ \psi_1(-A) + \varepsilon &\leq \varphi_m(-A) \end{cases}$$

Donc : $\forall m \geq n_0, \forall u \in [-A, A]; \quad \psi_1(-A) - \varepsilon \leq \varphi_m(-A) \leq \varphi_m(u) \leq \varphi_m(A) \leq \psi_2(A) + \varepsilon$ et puis :
 $|\varphi_m(u)| \leq \max(|\psi_1(-A)| + \varepsilon, |\psi_2(A)| + \varepsilon) \leq |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 2\varepsilon = |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1.$

D'où :

$$\sup_{u \in [-A, A]} |\varphi_m(u)| \leq |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1$$

Montrons que $\{|u - \varphi_n(u)|^2 / |u| \leq A \text{ et } n \geq 1\}$ est majoré .

$$\text{On a : } \{|u - \varphi_n(u)|^2 / |u| \leq A \text{ et } 1 \leq n \leq n_0\} = \bigcup_{1 \leq n \leq n_0} \{|u - \varphi_n(u)|^2 / |u| \leq A\}$$

Pour $n \in \{1, \dots, n_0\}$ fixé, l'application $u \mapsto |u - \varphi_n(u)|^2$ est continue sur le compact $[-A, A]$, donc bornée, on note M_n sa borne supérieure.

$$\text{On a alors } \sup\{|u - \varphi_n(u)|^2 / |u| \leq A \text{ et } 1 \leq n \leq n_0\} \leq \max_{1 \leq n \leq n_0} (M_n) \stackrel{\text{noté}}{=} M'.$$

$$\text{Si } n \geq n_0, \text{ alors } \quad 0 \leq |u - \varphi_n(u)|^2 \leq (|u| + |\varphi_n(u)|)^2 \leq (A + |\psi_1(-A)| + |\psi_2(A)| + 1)^2 \stackrel{\text{noté}}{=} M'' ,$$

donc $\sup\{|u - \varphi_n(u)|^2 / |u| \leq A \text{ et } n \geq n_0\} \leq M''$.

Conclusion : L'ensemble $\{|u - \varphi_n(u)|^2 / |u| \leq A \text{ et } n \geq 1\}$ est majoré et

$$M = \sup\{|u - \varphi_n(u)|^2 / |u| \leq A \text{ et } n \geq 1\} \leq \max(M', M'').$$

26. Soit $A > 0$, $\varepsilon > 0$ et $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ la suite des points de discontinuités de ψ_1 dans $[-A, A]$ (s'il y'en a), $J_p =]\lambda_p - \frac{1}{2^p} \frac{\varepsilon}{M}, \lambda_p + \frac{1}{2^p} \frac{\varepsilon}{M}[$ et $K = [-A, A] - \bigcup_{p \geq 1} J_p$.

K est un compact de \mathbb{R} , car fermé (intersection d'un fermé et du complémentaire d'un ouvert) et borné ($K \subset [-A, A]$).

$$\int_{-A}^A |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du = \int_K |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du + \int_{\bigcup_{p \geq 1} J_p} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du.$$

D'après la question 24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du = \int_K |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2} du$.

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_{p \geq 1} J_p} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du &\leq \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{J_p} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du \\ &\leq \sum_{p=1}^{+\infty} M \int_{J_p} e^{-u^2/2} du \\ &\leq e^{-A} \frac{\varepsilon}{M} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = 2e^{-A} \frac{\varepsilon}{M}. \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé .

27. Soit $A > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a : $\frac{1}{2} \int_{-A}^A |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du = \Phi(f_n) \leq E(f_n)$.

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n) = E(g)$ (question 15.), donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $E(f_n) \leq E(g) + \varepsilon$ pour tout entier $n \geq n_0$ et par suite :

$$\frac{1}{2} \int_{-A}^A |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du \leq E(f_n) \leq E(g) + \varepsilon.$$

Par la question 24.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-A}^A |u - \varphi_n(u)|^2 e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} \int_{-A}^A |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2} du$, ce qui montre que

$$\frac{1}{2} \int_{-A}^A |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2} du \leq E(g) + \varepsilon.$$

Donc $u \mapsto |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2}$ est intégrable sur \mathbb{R} et $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |u - \psi_1(u)|^2 e^{-u^2/2} du \leq E(g) + \varepsilon$. et ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

En conséquence :

$$\Phi(\psi_1) \leq E(g)$$
