

PREMIÈRE PARTIE.

Soit φ une application de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels dans lui-même vérifiant les conditions suivantes :

- i) quels que soient les nombres réels λ et μ , $\varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu)$.
- ii) Quels que soient les nombres réels λ et μ , $\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)$.
- iii) $\varphi(1) = 1$.

- 1. Calculer $\varphi(\rho)$ pour tout nombre rationnel ρ .
- 2. Démontrer que, si un nombre réel λ est positif, $\varphi(\lambda)$ l'est aussi. En déduire le sens de variation de la fonction φ .
- 3. Démontrer que $\varphi(\lambda) = \lambda$ pour tout nombre réel λ .

DEUXIÈME PARTIE.

Soient P et P' deux plans affines réels (d'espaces vectoriels associés \vec{P} et \vec{P}') et f une application affine bijective de P sur P' qui transforme trois points alignés quelconques de P en des points alignés de P' .

- 1. (a) Soient a, b, c trois points de P tels que $f(a), f(b), f(c)$ soient alignés : démontrer que a, b, c sont eux-mêmes alignés.
(On pourra, supposant a, b, c non alignés, montrer que l'image par f de tout point x de P serait alors alignée avec $f(a), f(b), f(c)$).
- (b) Montrer que, pour toute droite $D \subset P$, $f(D)$ est une droite de P' ; et que f transforme des droites parallèles en des droites parallèles.
- 2. On munit le plan affine P d'une origine O . On n'autorise dans cette question que des constructions dont chaque pas consiste, soit à tracer la droite passant par deux points distincts déjà connus, soit à mener par un point connu la parallèle à une droite connue, soit à choisir un point auxiliaire. On tracera les figures à proximité du texte.
 - (a) Supposant donnés O et deux points x et y de P , construire le point s tel que $\vec{Os} = \vec{Ox} + \vec{Oy}$ (ne pas omettre le cas où O, x et y sont alignés).
 - (b) Soient \vec{v} un vecteur non nul de P et λ, μ des nombres réels.
Supposant donnés O et les points x, ℓ, m tels que $\vec{Ox} = \vec{v}$, $\vec{O\ell} = \lambda\vec{v}$, $\vec{Om} = \mu\vec{v}$, construire le point p tel que $\vec{Op} = \lambda\mu\vec{v}$.
- 3. Á tout vecteur $\vec{v} \in \vec{P}$, on associe le point x de P tel que $\vec{Ox} = \vec{v}$, puis on note $F(\vec{v})$ le vecteur $\vec{f(O)f(x)}$ de \vec{P}' , ce qui définit une application de \vec{P} dans \vec{P}' .

- (a) Démontrer que quels que soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \vec{P} , l'égalité :

$$F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}).$$

- (b) Étant donné un vecteur $\vec{v} \neq \vec{O}$ de \vec{P} , démontrer l'existence d'une fonction $\varphi_{\vec{v}}$ de \mathbb{R} dans lui-même telle que l'on ait, pour tout nombre réel λ :

$$F(\lambda\vec{v}) = \varphi_{\vec{v}}(\lambda)F(\vec{v}).$$

- (c) Démontrer que la fonction $\varphi_{\vec{v}}$ ne dépend pas de \vec{v} , ce qui permet d'ailleurs de la noter désormais φ .
- (d) Démontrer, en utilisant la première partie, que F est linéaire et f est affine.
Énoncer un théorème qui résume le contenu de la seconde partie.

TROISIÈME PARTIE.

Dans cette partie E désigne un espace affine de dimension 3 ; O est un point fixé de E ; \mathcal{D}_O est l'ensemble des droites de E passant par O ; \mathcal{P}_O est l'ensemble des plans de E contenant le point O .

Dans les questions [1.], [2.] et [3.] on donne une application *bijective* α de l'ensemble \mathcal{D}_O sur lui-même qui transforme trois droites coplanaires quelconques en droites coplanaires.

- [1.] Soient D_1, D_2 et D_3 des droites de \mathcal{D}_O telles que $\alpha(D_1), \alpha(D_2), \alpha(D_3)$ soient coplanaires : montrer qu'elles sont elles-mêmes coplanaires.
- [2.] On choisit dans \mathcal{P}_O un plan P_O : montrer que les transformés par α des droites de \mathcal{D}_O incluses dans P_O sont exactement les droites de \mathcal{D}_O incluses dans un certain plan P'_O .
- [3.] Soient P et P' deux plans affines ne contenant pas O et respectivement parallèles à P_O et à P'_O . En utilisant ces plans et la conclusion de la partie II, construire une application *bijective* g de E sur lui-même telle que l'on ait $\alpha(D) = g(D)$ pour toute droite $D \in \mathcal{D}_O$ (on pourra caractériser l'application linéaire associée l par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires convenables).
- [4.] Soit β une application *bijective* de \mathcal{P}_O sur lui-même telle que pour tout triplet (P_1, P_2, P_3) des plans de \mathcal{P}_O ayant une droite commune, les plans $\beta(P_1), \beta(P_2), \beta(P_3)$ aient une droite commune.
Démontrer l'existence d'une application *bijective* g de E sur lui-même telle que l'on ait $\beta(P) = g(P)$ pour tout plan $P \in \mathcal{P}_O$.

QUATRIÈME PARTIE.

On note maintenant :

E un espace vectoriel *euclydien* de dimension 3,

\mathcal{D} l'ensemble de ses droites vectorielles,

\mathcal{P} l'ensemble de ses plans vectoriels,

$O(E)$ le groupe de ses isométries vectorielles,

$O^+(E)$ le sous groupe de $O(E)$ formé des rotations vectorielles,

(on parlera désormais de *droites, plans, isométries, rotations*, l'adjectif **vectoriel** étant à chaque fois sous-entendu)

$u \circ v$ la composée des applications u et v ,

Id_E l'application identique de E dans lui-même,

u^{-1} l'application réciproque d'une bijection u ,

s_V la symétrie (orthogonale) par rapport à un sous espace vectoriel V de E .

- [1.] On fixe dans cette question une isométrie g .
 - (a) Montrer que l'application i_g qui à toute isométrie u fait correspondre $g \circ u \circ g^{-1}$ est un automorphisme du groupe $O(E)$. Comparer i_g et i_{-g} .
 - (b) Soit V un sous espace vectoriel de E ; démontrer que $i_g(s_V)$ est la symétrie par rapport à un sous espace vectoriel que l'on précisera.
 - (c) On donne un rotation u d'axe D et d'angle θ relativement à des orientations choisies sur E et sur D : décrire $i_g(u)$. Montrer que $i_g(O^+(E)) = O^+(E)$.

2. Étant donné une isométrie g , déterminer les isométries g' telles que $i_{g'} = i_g$.

Dans les questions 3. à 7. on se donne un automorphisme quelconque h du groupe $O(E)$.

3. (a) Déterminer les isométries u telles que $u^2 = Id_E$. Mettre en évidence, dans l'ensemble des isométries trouvées, un sous ensemble qui engendre le groupe $O(E)$ des isométries.
(b) Étant donné deux plans P et Q , établir l'existence d'une isométrie g (par exemple une rotation) telle que :

$$s_Q = g \circ s_P \circ g^{-1}.$$

- (c) Dédire des questions 3a et 3b que, pour tout plan $P \in \mathcal{P}$, $h(s_P)$ est la symétrie par rapport à un plan que l'on notera $\beta(P)$. Montrer que l'application $\beta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est bijective.
4. Montrer que $h(O^+(E)) = O^+(E)$. En particulier, si $D \in \mathcal{D}$, déterminer la nature de $h(s_D)$.
5. (a) Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur la transformée $s_P \circ s_Q$, pour que deux plans P et Q soient perpendiculaires.
(b) Étudier les transformés par β de deux plans perpendiculaires, puis de trois plans ayant une droite vectorielle commune.
6. Démontrer que, si une application l de E dans lui-même est linéaire et conserve l'orthogonalité des vecteurs, elle est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.
7. Dédire de l'étude précédente et la conclusion de III.4. l'existence d'une rotation r telle que $h = i_r$.
8. Déterminer les automorphismes du groupe $O^+(E)$.