

Concours Centrale - Supelec 2003

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques II

Partie I - Exemples élémentaires

I.A.1) Soit M un élément de $E_n(I)$ vérifiant (P1). Pour $x \in I$, on a alors :

$$\frac{M(x+h) - M(x)}{h} M(x) = M(x) \frac{M(x+h) - M(x)}{h}$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $t+h \in I$, puisque $M(x+h)M(x) = M(x)M(x+h)$. En faisant tendre h vers 0, et en utilisant la continuité du produit matriciel, nous obtenons que $M'(x)M(x) = M(x)M'(x)$ pour tout x de I .

I.A.2) Nous allons commencer par démontrer que si M et N sont des éléments de $E_n(I)$, le produit MN est également élément de $E_n(I)$, avec $(MN)' : x \mapsto M'(x)N(x) + M(x)N'(x)$. Tout d'abord, le produit matriciel, défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et à valeur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est de classe C^1 (chaque composante du produit AB est un polynôme en les composantes de A et de B), donc MN est de classe C^1 comme composée d'applications de classe C^1 . Nous avons d'autre part, pour $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in I$:

$$\frac{(MN)(x+h) - (MN)(x)}{h} = M(x+h) \frac{N(x+h) - N(x)}{h} + \frac{M(x+h) - M(x)}{h} N(x),$$

et donc $(MN)'(x) = M(x)N'(x) + M'(x)N(x)$ en faisant tendre h vers 0.

On en déduit alors facilement par récurrence sur k que M^k est élément de $E_n(I)$, avec

$$(M^k)' = M'M^{k-1} + MM'M^{k-2} + \dots + M^{k-2}M'M + M^{k-1}M' = \sum_{i=0}^{k-1} M^i M' M^{k-1-i}.$$

I.A.3) L'application $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1}$ est également de classe C^1 (chaque composante de A^{-1} est une fraction rationnelle en les coefficients de A), donc M^{-1} est de classe C^1 comme composée de deux applications de classe C^1 . Nous avons d'autre part, en utilisant le résultat démontré précédemment :

$$(MM^{-1})' = M'M^{-1} + M(M^{-1})'$$

mais MM^{-1} est constante : sa dérivée est donc nulle. On en déduit :

$$(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}.$$

I.B.1) Comme $M' : x \mapsto \begin{pmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{pmatrix}$, la propriété (P2) se traduit par :

$$\begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}.$$

En particulier, $c'b - cb' = 0$ et $(d' - a')b - (d - a)b = 0$, donc les fonctions c/b et $(d - a)/b$ sont constantes puisque leurs dérivées sont nulles sur l'intervalle I .

Il existe donc deux réels λ et μ tels que $c = \lambda b$ et $d = a + \mu b$, ce qui donne pour $x \in I$:

$$M(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ \lambda b(x) & a(x) + \mu b(x) \end{pmatrix} = a(x) I_2 + b(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \in \text{Vect}(I_2, A)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$.

I.B.2) Nous sommes dans l'un des cas suivants :

- A n'a pas de valeur propre réelle : tout vecteur non nul X convient ;
- A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 : si X_1 et X_2 sont des valeurs propres associées, le vecteur $X = X_1 + X_2$ convient ;
- A a une valeur propre double λ : comme A n'est pas scalaire, l'espace propre associé à λ est de dimension 1 et il suffit de choisir X n'appartenant pas à cette droite propre.

Comme (X, AX) est une base de \mathbb{R}^2 , il suffit de démontrer que $BX = (uI_2 + vA)X$ et $B(AX) = (uI_2 + vA)(AX)$ pour obtenir l'égalité $B = uI_2 + vA$. La première égalité résulte de la définition de (u, v) , la seconde s'obtient en faisant commuter A et B : $B(AX) = A(BX) = A(uX + vAX) = A(uI_2 + vA)X = (uI_2 + vA)(AX)$.

I.B.3) Pour $x \in I$ fixé, on peut appliquer le résultat précédent avec $A = M(x)$ et $B = M'(x)$: il existe $u(x), v(x) \in \mathbb{R}$ tels que $M'(x) = u(x)I_2 + v(x)M(x)$. D'autre part, $(I_2, M(x))$ est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc ce couple $(u(x), v(x))$ est unique. Nous obtenons donc l'existence et l'unicité d'un couple (u, v) d'applications de I dans \mathbb{R} tel que $M' = uI_2 + vM$. On peut ensuite remarquer que $(u(x), v(x))$ est la solution (unique) d'un système de quatre équation à deux inconnues : on peut donc exprimer $u(x)$ et $v(x)$ sous forme de fractions rationnelles en les coefficients des matrices $M(x), M'(x)$ (par exemple avec les formules de Cramer). Comme les applications M et M' sont continues, les fonctions u et v le sont également.

Pour tout $x \in I$:

$$C'(x) = M'(x)M(x_0) - M(x_0)M'(x) = (u(x)I_2 + v(x)M(x))M(x_0) - M(x_0)(u(x)I_2 + v(x)M(x)) = v(x)C(x).$$

Chaque composante y de C vérifie donc le problème de Cauchy : $y' = vy$ et $y(x_0) = 0$. Comme l'application v est continue, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que la seule solution de ce problème est la fonction nulle : toutes les composantes de C sont nulles.

On en déduit que pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $x \in I$, $M(x_0)M(x) = M(x)M(x_0)$: M vérifie (P1).

I.B.4) a) On remarque tout d'abord que M est bien de classe C^1 sur \mathbb{R} , avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, M'(x) = \begin{pmatrix} 2x & 2|x| \\ 2x & -2x \end{pmatrix}.$$

Il suffit ensuite de faire le calcul pour vérifier que $M(x)$ et $M'(x)$ commutent.

b) Supposons que M vérifie (P2), ce qui se traduit par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} b(x)c'(x) - b'(x)c(x) = 0 & (1) \\ -4x b(x) + 2x^2 b'(x) = 0 & (2) \\ 4x c(x) - 2x^2 c'(x) = 0 & (3) \end{cases}$$

Sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} , l'équations (2) a pour solution générale : $b(x) = \lambda x^2$. Comme b est de classe C^1 sur \mathbb{R} , il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, b(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \beta x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

De manière symétrique, il existe λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = \begin{cases} \lambda x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \mu x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'équation (1) n'impose aucune condition supplémentaire.

Réciproquement, si $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ sont quatre réels quelconques, les applications b et c définies par les formules ci-dessus donnent bien un élément $x \mapsto M(x)$ de $E_2(\mathbb{R})$ vérifiant (P2).

On montre ensuite facilement que pour x, y de même signe $M(x)M(y) = M(y)M(x)$. Fixons donc maintenant $x > 0$ et $y < 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= \begin{pmatrix} (1+x^2)(1+y^2) + \alpha\mu x^2 y^2 & \beta(1+x^2)y^2 + \alpha x^2(1-y^2) \\ \lambda x^2(1+y^2) + \mu(1-x^2)y^2 & (1-x^2)(1-y^2) + \lambda\beta x^2 y^2 \end{pmatrix} \\ M(y)M(x) &= \begin{pmatrix} (1+x^2)(1+y^2) + \beta\lambda x^2 y^2 & \alpha x^2(1+y^2) + \beta(1-x^2)y^2 \\ \mu(1+x^2)y^2 + \lambda x^2(1-y^2) & (1-x^2)(1-y^2) + \alpha\mu x^2 y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons que M vérifie (P1) si et seulement si $\alpha = \beta$ et $\lambda = \mu$. Les solutions de la forme voulue vérifiant (P1) sont donc les applications :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1+x^2 & \alpha x^2 \\ \lambda x^2 & 1-x^2 \end{pmatrix}$$

avec α, λ réels quelconques. En particulier, l'exemple du a) ne vérifie pas (P1) puisque $\alpha = 1, \beta = -1$ et $\lambda = \mu = 1$.

I.C.1) Si nous notons (a, b, c, d) les composantes de la matrice M , l'application $x \mapsto z(x) = a(x) + ic(x)$ est alors une application de classe C^1 définie sur l'intervalle I et à valeur dans le cercle unité du plan complexe : d'après le théorème de relèvement, il existe une application θ de classe C^1 de I dans \mathbb{R} telle que $z(x) = \exp(i\theta(x))$ pour tout x , puis :

$$\forall x \in I, M(x) = \begin{pmatrix} \cos \theta(x) & \sin \theta(x) \\ \sin \theta(x) & -\cos \theta(x) \end{pmatrix}$$

puisque $M(x)$ est orthogonale indirecte.

I.C.2) Nous avons facilement $M(x)M'(x) = \begin{pmatrix} 0 & \theta'(x) \\ -\theta'(x) & 0 \end{pmatrix}$ et $M'(x)M(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta'(x) \\ \theta'(x) & 0 \end{pmatrix}$, donc M vérifie (P2) si et seulement si θ est constante.

Partie II - Étude de cas particuliers

II.A L'équation est bien de type (Q) avec $F : (x, M) \mapsto \sum_{k=0}^m a_k(x)M^{2k+1}$. Comme $F(x, M)$ est antisymétrique dès que M l'est, on peut appliquer le résultat b) avec $E = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: l'existence de x_0 tel que $U(x_0) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ assure que $U(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in I$.

Ce résultat se généralise aux équations de la forme :

$$M'(x) = \sum_{k=0}^m a_k(x) {}^t P_k(x) M^{2k+1}(x) P_k(x)$$

où $m \in \mathbb{N}$, a_0, \dots, a_m sont de classe C^0 de I dans \mathbb{R} et P_0, \dots, P_m sont de classe C^0 de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque pour $x \in I$ et $M \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$, on a :

$${}^t \left(\sum_{k=0}^m a_k(x) {}^t P_k(x) M^{2k+1} P_k(x) \right) = \sum_{k=0}^m a_k(x) {}^t P_k(x) (-M)^{2k+1} P_k(x) = - \sum_{k=0}^m a_k(x) {}^t P_k(x) M^{2k+1} P_k(x).$$

II.B.1) T est de classe C^1 , avec pour $x \in I$:

$$T'(x) = P^{-1} M'(x) P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^m a_k(x) M^k(x) \right) P = \sum_{k=0}^m a_k(x) P M^k(x) P^{-1} = \sum_{k=0}^m a_k(x) T^k(x)$$

donc T vérifie la même équation différentielle matricielle polynômiale que M .

Si E désigne le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures, nous avons clairement :

$$\forall x \in I, \forall A \in E, \sum_{k=0}^m a_k(x) A^k \in E.$$

Nous pouvons donc appliquer le b) : comme $T(x_0)$ est élément de E , $T(x)$ est élément de E pour tout $x \in I$. Les matrices $M(x)$ sont donc toutes trigonalisées par la matrice de passage P .

II.B.2) Notons E le sous-espace vectoriel formé par les matrices triangulaires supérieures strictes et supposons que $T(x) \in E$ pour tout x . Alors $T'(x) \in E$ pour tout x , et donc $a_0(x) I_n = T'(x) - \sum_{k=1}^m T^k(x) \in E$ pour tout x , ce qui impose $a_0 = 0$.

Réciproquement, supposons que $a_0 = 0$. Pour tout $x \in I$ et pour tout $A \in E$, $\sum_{k=0}^m a_k(x) A^k \in E$ donc on peut une nouvelle fois appliquée la propriété b) : $T(x) \in E$ pour tout $x \in I$ puisque $T(x_0) \in E$.

II.B.3) D'après la question I.A.2), l'application T^r est de classe C^1 et $(T^r)' = \sum_{i=0}^{r-1} T^i T' T^{r-1-i}$. Or, à x fixé, $T(x)$ et $T'(x)$ commutent, puisque $T'(x)$ est un polynôme en $T(x)$. On obtient donc :

$$(T^r)'(x) = r T'(x) T^{r-1}(x) = r \left(\sum_{k=1}^m a_k(x) T^k(x) \right) T^{r-1} = r \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1}(x) T^k(x) \right) T^r(x).$$

On en déduit que T^r est solution de l'équation de type \mathcal{Q} :

$$M' = \alpha_1 P_1 M$$

avec $\alpha_1 : x \mapsto r$ et $P_1 : x \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1}(x) T^k(x)$. Cette équation a, d'après la propriété a), une unique solution maximale prenant la valeur 0 en x_0 : comme T^r et 0 sont solutions, elles sont égales et $T^r(x)$ est nulle pour tout $x \in I$.

II.C.1) Une nouvelle fois, il suffit de remarquer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec $U(x_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tout $x \in I$ et $M \in E$, $\sum_{k=0}^m a_k(x) P_k(x) M^k Q_k(x) \in E$. D'après la propriété b), on en déduit que $U(x) \in E$ pour tout $x \in I$ puisque $U(x_0) \in E$.

II.C.2) En appliquant la question précédente, pour $x_0 \in I$ quelconque, on obtient que $U(x)$ commute avec $U(x_0)$ pour tout $x \in I$ ($P_k(x) = Q_k(x) = I_n$ commutent avec $U(x_0)$ pour tout x). C'est la propriété (P1).

D'autre part, $U'(x)$ est, à x fixé, un polynôme en $U(x)$ donc $U(x)$ et $U'(x)$ commutent : U vérifie aussi (P2).

Fixons $x_0 \in I$ et notons E la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendrée par $U(x_0)$. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, on montre facilement que

$$E = \{ \alpha_0 I_n + \alpha_1 U(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} U^{n-1}(x_0), \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} \}.$$

E est donc un sous-espace vectoriel de dimension au plus n . D'autre part, E est "stable" par F et $U(x_0) \in E$, donc la propriété b) s'applique encore : $U(x) \in E$ pour tout $x \in I$. On en déduit que l'espace vectoriel engendré par les $U(x)$ est de dimension au plus n , puisque E est lui-même de dimension au plus n .

II.D Pour M, N éléments de E fixés, notons $U(x) = \exp(xM)N \exp(-xM)$ pour $x \in \mathbb{R}$. U est alors élément de $E_n(\mathbb{R})$, avec $U' = MU - UM$ et $U(0) = N$. L'équation $U' = UM - MU$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants (sur l'espace vectoriel E), à laquelle on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : M étant fixé dans E , l'application $\mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(E)$ qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe l'application linéaire $U \mapsto UM - MU$ est continue puisque constante. On sait donc que le problème de Cauchy a une unique solution dans E . D'autre part, ce problème de Cauchy a aussi une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (il suffit de remplacer E par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). On en déduit donc que $U(x)$ est élément de E pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : cette question est maladroite (mais moins que III.A.2) car l'équation différentielle demandée n'est pas du type de celles étudiées depuis le début de la partie II (d'ailleurs, l'énoncé parle d'équation différentielle matricielle sans préciser son "type"). De nombreux candidats ont dû perdre du temps à chercher une équation de type (Q) sans la trouver.

Partie III - Cas des matrices orthogonales

III.A.1) L'application constante $x \mapsto U(x_0)$ est solution de l'équation \mathcal{E}' et prend la même valeur que U à l'instant x_0 . D'après le résultat a), les deux applications coïncident : U est constante.

III.A.2) Nous avons $(N - J)' = {}^tU'JU + {}^tUJU' = a((I_n - {}^tU^2)JU + {}^tUJ(I_n - U^2)) = a((J - N)U + {}^tU(J - N))$. $N - J$ est donc solution de l'équation linéaire $M' = -a(MU - {}^tUM)$. Comme $(N - J)(x_0) = 0$, le théorème de Cauchy "ordinaire" permet d'affirmer que $N(x) = J(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarque : il y a une grosse erreur dans l'énoncé, car l'équation trouvée n'est pas, comme demandé, de type (Q) et il faut une nouvelle fois revenir au théorème de Cauchy habituel. Cela a sans doute desservi les bons candidats.

On en déduit que ${}^tU(x)JU(x) = J$ pour tout $x \in I$, puis $\det^2 U(x) = 1$ pour tout x (on peut simplifier par $\det J$ qui est non nul). Comme l'application $x \mapsto \det U(x)$ est continue, elle est constante sur l'intervalle I , égale à 1 ou à -1.

III.B.1) a) U_0 est une matrice orthogonale directe donc 1 est valeur propre de U_0 , ce qui prouve l'existence de Z_0 .

b) L'endomorphisme associé à U_0 est une rotation d'axe dirigé par Z_0 , dont la matrice dans la base (X_0, Y_0, Z_0) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ puisque -1 n'est pas valeur propre de U_0 et que $U_0 \neq I_3$.

Nous avons alors :

$$\det_B(C) = \begin{vmatrix} 0 & -\sin \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 1 & \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \sin \theta (1 - \cos \theta).$$

Comme θ est non nul modulo π , ce déterminant est non nul : C est une base de \mathbb{R}^3 .

c) En travaillant dans la base C , nous obtenons que U_0 est semblable à une matrice compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Si nous notons P la matrice de passage de la base canonique à la base C et $B = P^{-1}U'(x_0)P$, l'hypothèse de commutation $U'(x_0)U(x_0) = U(x_0)U'(x_0)$ se traduit donc par $AB = BA$. Il suffit alors d'écrire cette égalité pour montrer que B est de la forme :

$$\begin{pmatrix} y - bz & z & x \\ x - cz & y & z + bx \\ z & x & y + cx \end{pmatrix}$$

avec x, y, z réels quelconques. Ceci prouve que le commutant de A est de dimension 3. Comme il contient les matrices indépendantes I_3, A et A^2 , ce commutant est égal à la sous-algèbre engendrée par A . Autrement-dit, il existe $u, v, w \in \mathbb{R}$ tels que $B = uI_3 + vA + wA^2$, i.e. tels que $U'(x_0) = uI_3 + vU(x_0) + wU^2(x_0)$.

La preuve précédente étant valable pour tout x_0 , nous obtenons bien le résultat voulu. La continuité des fonctions u, v et w n'est pas difficile à justifier, une nouvelle fois en utilisant les formules de Cramer.

d) $({}^tUU)' = {}^tU'U + {}^tUU' = (uI_3 + v{}^tU + w{}^tU^2)U + {}^tU(uI_3 + vU + wU^2) = (u + w)(U + {}^tU) + 2vI_3.$

On en déduit, comme tUU est constant, que $(u + w)(U + {}^tU) + 2vI_3 = 0$. En multipliant par U , nous obtenons $(u + w)I_3 + 2vU + (u + w)U^2 = 0$. Il reste alors à se souvenir que, pour tout $x \in I$, la famille $(I_3, U(x), U^2(x))$ est libre : on a donc nécessairement $u + w = 0$ et $v = 0$. Ainsi, U vérifie l'équation différentielle :

$$U'(x) = u(x)(I_3 - U^2(x)),$$

qui est bien du type \mathcal{E}' avec $a = u = -w$.

III.B.2) Comme -1 n'est pas valeur propre de $U(x)$, on peut poser $A(x) = (I_3 + U(x))^{-1}(I_3 - U(x))$ et définir ainsi un élément de $E_3(I)$ (d'après la question I.A.3).

En dérivant $(I_3 + U)A = I_3 - U$, nous obtenons $U'A + (I_3 + U)A' = -U'$, soit $(I + U)A' = -U'(I + A)$. Comme $U' = a(I_3 - U^2) = a(I_3 + U)(I_3 - U)$, cela donne en simplifiant par $I_3 + U$ (qui est inversible) :

$$A' = -a(I_3 - U)(I_3 + A) = -a(I_3 + A) + aU(I_3 + A) = -a(I_3 + A) + a(I_3 - A) = -2aA.$$

Chaque coefficient $a_{i,j}$ de A est donc solution de l'équation différentielle $y'(x) = -2a(x)y(x)$. En notant b la primitive de $-2a$ qui s'annule en x_0 (avec x_0 point fixé de I), on peut donc écrire $a_{i,j}$ sous la forme $\alpha_{i,j} \exp(b(x))$, ce qui donne $A(x) = \exp(b(x))A_0$ où $A_0 = A(x_0)$. On revient alors facilement à U : comme $U(I_3 + A) = I_3 - A$, $I_3 + A$ est nécessairement inversible. En effet, dans le cas contraire, $I_3 - A$ serait également non inversible, et il existerait un vecteur non nul X_1 tel que $X_1 = AX_1$. Ainsi, on aurait $U(X_1 + AX_1) = 0$ puis $AX_1 = -X_1$ (U est inversible), ce qui est absurde. Nous pouvons donc écrire :

$$U = (I_3 - A)(I_3 + A)^{-1} = (I_3 - \lambda(x)A_0)(I_3 + \lambda(x)A_0)^{-1}$$

avec $\lambda(x) = e^{b(x)}$.

Une nouvelle fois, l'énoncé n'est pas très heureux : faut-il se contenter de ce résultat très peu précis ? Si on veut simplifier cette expression, il faut travailler un peu sur la matrice A_0 . La seule méthode que j'ai trouvée est la suivante : quitte à faire un changement de base (i.e. à remplacer $U(x)$ par $P^{-1}U(x)P$ où P est une matrice orthogonale directe bien choisie), on peut supposer que

$$U(x_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Nous obtenons ensuite $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U(x) = \begin{pmatrix} C(x) & -S(x) & 0 \\ S(x) & C(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en posant $a = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1}$, $C(x) = \frac{1 - \lambda^2(x)a^2}{1 + \lambda^2(x)a^2}$ et $S(x) = \frac{2\lambda(x)a}{1 + \lambda^2(x)a^2}$ (merci Maple).

Réciproquement, soit $a \in \mathbb{R}^*$, $P \in SO_3(\mathbb{R})$, I un intervalle quelconque, λ une application de classe C^1 de I dans \mathbb{R} et $U \in E_3(I)$ définie par :

$$U(x) = P \begin{pmatrix} C(x) & -S(x) & 0 \\ S(x) & C(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t P, \text{ avec } C(x) = \frac{1 - \lambda^2(x)a^2}{1 + \lambda^2(x)a^2} \text{ et } S(x) = \frac{2\lambda(x)a}{1 + \lambda^2(x)a^2}.$$

On montre alors très facilement que U est à valeur dans $SO_3(\mathbb{R})$, qu'elle vérifie (P2) et qu'aucun $U(x)$ n'est une symétrie. D'autre part, U vérifie également (P1).

III.C.) C'est maintenant le bouquet final : l'énoncé fait référence au III.B.1-d au lieu, sans doute, du I.B.4-b). Nous venons de voir à la question précédente qu'un élément de $I_3(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses de la partie III.B vérifie nécessairement (P1). Nous devons donc nécessairement construire U de sorte qu'au moins l'une des matrices $U(x)$ soit une symétrie. L'idée est de profiter du passage par $U(0) = I_3$ pour changer l'axe de la rotation (tant que l'axe est invariant, les rotations commutent). Ainsi, nous pouvons définir l'application

$$U : x \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos x^2 & -\sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & \cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } x \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x^2 & -\sin x^2 \\ 0 & \sin x^2 & \cos x^2 \end{pmatrix} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

qui est bien de classe C^1 , à valeur dans $SO_3(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, U vérifie (02) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$, donc sur \mathbb{R} ($U(0) = I_3$ commute avec $U'(0) = 0$). Par contre, (P1) n'est pas vérifiée puisque, pour $x > 0 > y$, le coefficient d'indice (1, 3) de $U(x)U(y)$ vaut $\sin x^2 \sin y^2$ alors que celui de $U(y)U(x)$ est nul.

III.D.) Supposons que $U : x \mapsto \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ soit une solution au problème posé. Nous avons alors :

$$\begin{cases} a' = a^2 + bc + 1 \\ b' = b(a + d) \\ c' = c(a + d) \\ d' = d^2 + bc + 1 \end{cases}$$

En particulier, a et d sont solutions du problème de Cauchy ($y' = y^2 + bc + 1$, $y(0) = 0$). Comme l'application $(y, x) \mapsto y^2 + b(x)c(x) + 1$ est de classe C^1 , le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et l'unicité de la solution donne $a = d$. De même, b et c sont solutions du problème de Cauchy ($y' = 2ay$, $y(0) = 1$), donc $b = c$. Nous obtenons donc :

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a' = a^2 + b^2 + 1 \text{ et } b' = 2ab.$$

En posant $u = b^2 - a^2$, nous avons $u' = 2bb' - 2aa' = 2a(u - 1)$. La condition initiale impose $u(0) = 1$, donc $u(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on applique une nouvelle fois le théorème de Cauchy-Lipschitz). Ainsi, $b^2 = a^2 + 1$

puis $a' = 2(a^2 + 1)$ qui s'intègre en $\text{Arctan } a = 2x$ puisque $a(0) = 0$. Le domaine de définition maximal de a est donc $] -\pi/4, \pi/4[$ et $a(x) = \tan(2x)$. On obtient ensuite $b^2(x) = \tan^2(2x) + 1$, soit $b(x) = 1/\cos(2x)$ puisque $b(0) > 0$ et $\tan^2(2x) + 1$ ne s'annule pas. Ceci prouve que le domaine de définition de b est au maximum $] -\pi/4, \pi/4[$.

On en déduit que la solution maximale au problème de Cauchy posé est

$$U(x) = \begin{pmatrix} \tan(2x) & \frac{1}{\cos(2x)} \\ \frac{1}{\cos(2x)} & \tan(2x) \end{pmatrix}.$$

En effet, l'existence de cette solution est acquise d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il est donc inutile de vérifier que cette fonction est solution : c'est la seule possible d'après l'analyse précédente. Par contre, il faut justifier le domaine de définition de cette solution maximale, qui est bien sûr $I =] -\pi/4, \pi/4[$.