Mr : HAMANI Ahmed Mohammedia

A.Produit scalaire de matrices

1. **Montrons la formule de trace**
Notons $C = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, alors pour toute matrice $M = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$, on a $a_{ij} =< M\varepsilon_j, \varepsilon_i >$ et $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} < M\varepsilon_i, \varepsilon_i >$.
Soit P la matrice de passage de C à B, alors P est une matrice orthogonale et $e_i = P\varepsilon_i$ pour tout $i \in [[1, n]]$, donc
$tr(A) = tr({}^tPAP) = \sum_{i=1}^{n} < {}^tPAP\varepsilon_i, \varepsilon_i >= \sum_{i=1}^{n} < AP\varepsilon_i, P\varepsilon_i >= \sum_{i=1}^{n} < Ae_i, e_i >$.
2. **Un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$** La bilinéarité , la symétrie sont triviales.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ alors
$tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} < {}^tAAe_i, e_i >= \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|^2 \geq 0$, de plus si $tr({}^tAA) = 0$, on aura
$\forall i \in [[1, n]]$, $Ae_i = 0$, donc $A = 0$.
3. **Montrons que $< A, B >$ est positif**
La matrice B étant symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, il existe une base $(e_1, ..., e_n)$de vecteurs propres de B associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ qui sont positives grâce à la positivité de B, de plus A est symétrique positive, donc $\forall i \in [[1, n]]$ $< {}^tAe_i, e_i >=< Ae_i, e_i > \ \geq 0$, ce qui entraine que
$< A, B >= tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} < {}^tABe_i, e_i >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < {}^tAe_i, e_i > \ \geq 0.$

B.Décomposition polaire

4. **Expression de $\|A\|_2$**
. ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$.
. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< {}^tAAx, x >= \|Ax\|^2 \geq 0$.
. ${}^tAA$ étant symétrique réelle positive, donc diagonalisable dans une base orthonormée de ses vecteurs propres $(e_1, ..., e_n)$ associée aux valeurs propres positives $\lambda_1, ..., \lambda_n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$, $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$ et ${}^tAAx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, e_i > e_i$ donc
$\|Ax\|^2 =< {}^tAAx, x >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x, e_i >^2 \leq (\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i) \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 = (\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i)\|x\|^2 = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i$
ce qui entraine que $\|A\|_2 \leq \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i}$, de plus
Si $\lambda_j = \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i$, alors $\|Ae_j\|^2 =< {}^tAAe_j, e_j >= \lambda_j < e_j, e_j >= \lambda_j$, d'où l'égalité $\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i}$.
5. **Existence de l'auto-adjoint h**
f^*of est un endomorphisme auto-adjoint positif de E, donc d'après le théorème spectral, il existe $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E de vecteurs propres de f, alors l'endomorphisme h de E défini par $h(e_i) = \sqrt{\lambda_i}e_i$ où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de f^*of qui sont positifs grâce à la positivité de f^*of, répond à la question.
6. **Restriction de h à $Im(h)$ est un automorphisme**
. $h(Im(h)) \subset Im(h)$.
.Soit $y = h(x) \in Ker(h) \cap Im(f)$, alors $h^2(x) = h(y) = 0$, donc $< h^2(x), x >=< h^*oh(x), x >= \|h(x)\|^2 = 0$, et par suite $y = h(x) = 0$.
7. **Existence de l'isomorphisme v**
. Soit $x \in E$, $\|h(x)\|^2 =< h^2(x), x >=< f^*of(x), x >=< f(x), f(x) >= \|f(x)\|^2$, donc $\|h(x)\| = \|f(x)\|$.
. L'égalité $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$ entraine que $Ker(h) = Ker(f)$, et par suite $dim(Ker(h)) = dim(Ker(f)) = n - dim(Im(f)) = dim(Im(f))^{\perp}$.
. On choisit une base orthnormée $(e_1, ..., e_p)$ de $Ker(h)$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p)$ une base orthonormée de $(Im(f))^{\perp}$, on définit $v : Ker(h) \longrightarrow (Im(f))^{\perp}$ par $v(e_i) = \varepsilon_i$, alors v transforme une base orthonormée à une base orthonormée, donc v est un isomorphisme qui conserve la norme.

8. **Construction de l'automorphisme orthogonal** u

. $E = Ker(h) \bigoplus (Ker(h))^{\perp}$, or $(Ker(h))^{\perp} = (Ker(h^*))^{\perp} = Im(h)$, donc $E = Ker(h) \bigoplus Im(h)$.

. Soit u l'endomorphisme de E définit par $u = fo\widetilde{h}^{-1}$ sur $Im(h)$ et $u = v$ sur $Ker(h)$.

. u conserve la norme, en effet $\forall x \in E$, $\exists x_1 \in Ker(h), x_2 \in Im(h)$ tel que $x = x_1 + x_2$, alors $u(x_1) = v(x_1) \in (Im(f))^{\perp}$ et $u(x_2) = f(\widetilde{h}^{-1}(x_2)) \in Im(f)$, donc $u(x_1) \perp u(x_2)$ et par suite $\|u(x)\|^2 = \|u(x_1) + u(x_2)\|^2 = \|u(x_1)\|^2 + \|u(x_2)\|^2 = \|v(x_1)\|^2 + \|f(\widetilde{h}^{-1}(x_2))\|^2 = \|x_1\|^2 + \|h(h^{-1}(x_2))\|^2 =$
$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2$, donc u est un automorphisme orthogonal.

. On vérifit bien que $uoh = f$, en effet $Ker(h) = Im(f)$, donc $uoh = f = 0$ sur $Ker(h)$ et $uoh = fo\widetilde{h}^{-1}o\widetilde{h} = f$ sur $Im(h)$.

9. **La décomposition polaire**

. On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A, d'après ce qui précède $f = uoh$ où u un automorphisme orthogonal de E et h un endomorphisme auto-adjoint positif de E.

. Soient U la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, S celle de h dans cette base, alors $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique positive, et par traduction matricielle on obtient $A = US$.

C.Projeté sur un convexe compact

10. **Existence de** h_0

. L'application $h \longmapsto \|x - h\|$ est continue sur le compact H à valeurs réelles, donc elle est bornée et atteint sa borne inférieure dans H, c'est à dire $\exists h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$.

Unicité de h_0

. Supposons $\exists h_0 \neq h_1 \in H$ tels que $\|x - h_0\| = \|x - h_1\|$, alors par convexité de H , $m = \dfrac{h_0 + h_1}{2} \in H$ et l'égalité de la médiane appliquée au triangle (x, h_0, h_1) s'écrit
$\|x - h_0\|^2 + \|x - h_1\|^2 = 2\|x - m\|^2 + \dfrac{1}{2}\|h_0 - h_1\|^2$, donc $\|x - m\|^2 = \|x - h_0\|^2 - \dfrac{1}{4}\|h_1 - h_0\|^2 < \|x - h_0\|^2$, ce qui contredit la minimalité de h_0.

11. **Caractérisation de** h_0

. Soit $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$, alors $\forall h \in H$ $\forall t \in]0, 1[$
$\|x - (1 - t)h_0 - th\|^2 = \|x - h_0 - t(h - h_0)\|^2 = \|x - h_0\|^2 - 2t < x - h_0, h - h_0 > + t^2\|h - h_0\|^2 \geq \|x - h_0\|^2$
donc, $\quad 2 < x - h_0, h - h_0 > \ \leq \ t\|h - h_0\|^2$ et en tendant t vers 0, on obtient $< x - h_0, h - h_0 > \leq 0$.

. Réciproquement, supposons $\exists h_0 \in H$ tel que $\forall h \in H, < x - h_0, h - h_0 > \ \leq \ 0$, alors
$\forall h \in H, \|x - h\|^2 = \|(x - h_0) - (h - h_0)\|^2 = \|x - h\|^2 - 2 < x - h_0, h - h_0 > + \|h - h_0\|^2 \geq \|x - h_0\|^2$, donc
$\forall h \in H, \|x - h\| \geq \|x - h_0\|$, ce qui entraine que $\|x - h_0\|$ est un minorant atteint de $\{\|x - h\| \ /h \in H\}$, d'où $d(x, H) = \|x - h_0\|$.

D.Théorème de Carathéodory et compacité

12. **L'enveloppe convexe coïncide avec les combinaisons convexes**

. $x \in E$ est une combinaison convexe d'éléments de $H \iff \exists p \in \mathbb{N}^*, x_1, ..., x_p \in H, \lambda_1, ..., \lambda_p \geq 0$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. Posons $C_p = \{x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \ / \ \forall i \in [[1, p]], \lambda_i \geq 0, x_i \in H, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1\}$.
Montrons que $conv(H) = \displaystyle\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} C_p$.

. C est convexe.
Soient $x, y \in C$, $t \in]0, 1[$, alors $\exists p, q \in \mathbb{N}^*, \lambda_1, ..., \lambda_p, \mu_1, ..., \mu_q \geq 0$ et $x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q \in H$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ et $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i$, alors $tx + (1 - t)y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} t\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{q} (1 - t)\mu_i y_i \in C_{p+q} \subset C$.

. C contient H.
$H = C_1 \subset C$.

. Minimalité de C.
Soit K un convexe contenant H, alors une récurrence sur p montre que K contient les C_p. En effet
- K contient $H = C_1$.

-Supposons que K contient C_p et soit $x \in C_{p+1}$, alors $\exists \lambda_1, ..., \lambda_{p+1} \geq 0$ et $x_1, ..., x_{p+1} \in H$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i$, alors en posant $\lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$, on aura

$x = \lambda \sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i + \lambda_{p+1} x_{p+1}$, or par hypothèse de récurrence $\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in K$ et $x_{p+1} \in K$ et puisque $\lambda + \lambda_{p+1} = 1$, la convexité de K entraine que $x \in K$.
donc K contient tout les C_p, et par suite C.
En conclusion C est le plus petit convexe contenant H, c'est donc $conv(H)$.

13. **Existence des scalaires** μ_i
$card(x_2 - x_1, ..., x_p - x_1) = p - 1 \geq n + 1$, donc c'est une famille liée de E, d'où l'existence de $\mu_2, ..., \mu_p$ des réels non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^{p} \mu_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^{p} \mu_i x_i - (\sum_{i=2}^{p} \mu_i) x_1 = 0$, donc avec $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{p} \mu_i$, on aura $\sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0$ et $x = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i$.

14. $conv(H)$ **est constitué des combinaisons convexes d'au plus** $n+1$ **éléments**
Les μ_i sont non tous nuls, donc l'un d'eux est strictement positif, considérons
$\theta = min\{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \ / \ i \in [[1,p]] \ \text{ et } \ \mu_i > 0\} = \frac{\lambda_j}{\mu_j}$, alors en posant $\alpha_i = \lambda_i - \theta \mu_i$ pour $i \in [[1,p]]$, on aura
. - si $\mu_i \leq 0$, $\alpha_i \lambda_i - \theta \mu_i \geq 0$.
- si $\mu_i > 0$, $\alpha_i = \mu_i (\frac{\lambda_i}{\mu_i} - \theta) \geq 0$.
- $\alpha_j = 0$.
.. $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i - \theta \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 1 - \theta.0 = 1$.
... $x = \sum_{i+1 i \neq j}^{p} \alpha_i x_i$.
Donc x est combinaison convexe de $(p-1)$ éléments de H.
En conclusion on refait le même procédé avec ce dernier x tant que $p > n+1$, donc $conv(H)$ est constitué des combinaisons convexes d'au plus $(n+1)$ éléments de H.

15. **L'enveloppe convexe d'un compact est un compact**
. D'après la question précédente, $conv(H) = \{x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \ / \ (t_1, ..., t_{n+1}) \in \Lambda \ \text{ et } \ x_1, ..., x_{n+1} \in H\}$.
. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi & H^{n+1} \times \Lambda & \longrightarrow & E \\ & (x_1, ..., x_{n+1}, t_1, ..., t_{n+1}) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \end{array}$$

E est de dimension finie, donc φ est à composantes polynômiales, elle est donc continue.
. H^{n+1} est produit fini de compacts, donc c'est un compact, de plus Λ est fermé borné de $\mathbb{R}^{n+1}$, donc c'est un compact.
. $H = \varphi(H^{n+1} \times \Lambda)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.

E.Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

16. **L'enveloppe convexe de** $O_n(\mathbb{R})$ **est compact**
. $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé.
- l'application $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longmapsto M_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = {}^tMM$ est à coéfficients polynômiaux, donc φ est continue, et par suite $O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé comme image réciproque du fermé $\{I_n\}$.
. $\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, $\|M\|_1 = tr({}^tMM) = n$, où $\|.\|_1$ est la norme définie dans la partie A, donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné.
En conclusion $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte, et par suite d'après la question **15**, $conv(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

17. **L'enveloppe de** $O_n(\mathbb{R})$ **est contenu dans la boule unité**
Soit $M = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$ où $p \in \mathbb{N}^*, M_1, ..., M_p \in O_n(\mathbb{R}), \lambda_1, ..., \lambda_p$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, alors $\|M\|_2 \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \|M_i\|_2$, or $\|M_i\|_2 = \sqrt{\max_{\lambda \in Sp({}^tM_iM_i)} (\lambda)} = \sqrt{\max_{\lambda \in Sp(I_n)} (\lambda)} = 1$, donc $\|M\|_2 \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

18. **Les inégalités demandées**
. Si $V \in O_n(\mathbb{R})$, alors $tr(AV) - tr(AN) = tr(A(V-N))) = tr({}^t(M-N)(V-N)) = < M-N, V-N >$,

or N est le projeté de M sur $conv(O_n(\mathbb{R}))$, donc d'après la question **11**, puisque $V \in O_n(\mathbb{R})$, on aura $< M-N, V-N > \ \leq 0$, donc $tr(AV) \leq tr(AN)$.

. Si $V \in conv(O_n(\mathbb{R}))$, alors $V = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i V_i$ où $\lambda_1, ..., \lambda_p \geq 0$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et $V_1, ..., V_p \in O_n(\mathbb{R})$, alors $tr(AV) = tr(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i AV_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i tr(AV_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i tr(AN) = tr(AN)$.

. $tr(AN) - tr(AM) = tr(A(N-M)) = tr({}^t(M-N)(N-M)) = -\|M-N\|_1^2$, or $M \notin conv(O_n(\mathbb{R}))$ et $N \in conv(O_n(\mathbb{R}))$, donc $M \neq N$ et par suite $\|M-N\|_1 > 0$, d'où $tr(AN) < tr(AM)$.

. $tr(S) = tr(U^{-1}A) = tr(AU^{-1})$, or $U^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, donc d'après l'inégalité stricte précédente $tr(S) = tr(AU^{-1}) < tr(AM) = tr(USM)$.

19. **L'inégalité** $tr(MUS) \leq tr(S)$
S étant symétrique réelle positive, soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de S associée aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$, alors $tr(MUS) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < MUe_i, e_i >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < Ue_i, {}^tMe_i >$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraine que
$< Ue_i, {}^tMe_i > \leq \|Ue_i\| \|{}^tMe_i\|$, or $U \in O_n(\mathbb{R})$, donc $\|Ue_i\| = \|e_i\| = 1$ de plus $Sp({}^tMM) = Sp(M^tM)$, donc $\|M\|_2 = \|{}^tM\|_2$, ce qui entraine que
$tr(MUS) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|M\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(S)$ (car $\|M\|_2 \leq 1$).

20. **Conclusion**
. D'après la question 17, $conv(O_n(\mathbb{R})) \subset \mathfrak{B}$
. Supposons que cette inclusion est stricte, alors il existe $M \in \mathfrak{B}$ et M n'appartient pas à $conv(O_n(\mathbb{R}))$, ce qui aboutit d'après les questions 18 et 19 à la contradiction $tr(S) < tr(USM) = tr(MUS) \leq tr(S)$.
. En conclusion $conv(O_n(\mathbb{R}))$ est la boule unité fermée de $(M_n(\mathbb{R}), \|.\|_2)$.

F.Points extrémaux

21. **Une matrice orthogonale est extremale dans la boule unité**
Soit $X \in \mathbb{R}^n$, alors l'égalité de la médiane appliquée au triangle (O, VX, WX) s'écrit
$\|VX\|^2 + \|WX\|^2 = \frac{1}{2}\|VX - WX\|^2 + 2\|UX\|^2$, donc $\frac{1}{2}(\|VX - WX\|^2 = \|VX\|^2 + \|WX\|^2 - 2\|UX\|^2)$, or $\|UX\| = \|X\|$, $\|VX\| \leq \|V\|_2\|X\| \leq \|X\|$ et $\|WX\| \leq \|W\|_2\|X\| \leq \|X\|$, ce qui entraine que
$\frac{1}{2}\|VX - WX\|^2 \leq \|X\|^2 + \|X\|^2 - 2\|X\|^2 = 0$, donc $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $VX = WX$, c'est à dire $V = W$ ce qui entraine que $U = V = W$, d'où l'extrémalité de U dans $\mathfrak{B}$.

22. **La forme demandée de la matrice** A
. D'après la question **9**, $A = US$ où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive, S est diagonalisable dans une base orthonormée, donc $\exists Q \in O_n(\mathbb{R})$, $D = diag(d_1, ..., d_n)$ où les d_i sont les valeurs propres positives ou nulles tels que $S = {}^tQDQ$, donc $A = U^tQDQ = PDQ$ avec $P = U^tQ \in O_n(\mathbb{R})$.

23. **Montrons que les** d_i **sont inférieurs à** 1 **non tous éhaux à** 1
. ${}^tAA = {}^tQD^tPPDQ = {}^tQD^2Q$, donc $Sp({}^tAA) = Sp({}^tQD^2Q) = Sp(D^2) = \{d_1^2, ..., d_n^2\}$, donc $\|A\|_2 = \sqrt{max(d_1^2, ..., d_n^2)} = max(d_1, ..., d_n)$, or $\|A\|_2 \leq 1$, donc $\forall i \in [[1, n]], d_i \leq 1$.
. Supposons que $\forall j \in [[1, n]], d_j \geq 1$, donc $\forall j \in [[1, n]], d_j = 1$ et par suite $D = I_n$, ce qui entraine l'absurdité $A = PQ \in O_n(\mathbb{R})$.

24. **Conclusion**
. Soit $j \in [[1, n]]$ tel que $d_j < 1$ et soit $\alpha > 0$ tel que $d_j + \alpha < 1$.
. Notons $D_\alpha = diag(d_1, ..., d_{j-1}, d_j + \alpha, d_{j+1}, ..., d_n)$, alors avec $A_\alpha = PD_\alpha Q$, on aura $A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$ avec $A_\alpha, A_\alpha \in \mathfrak{B}$ mais $A \neq A_\alpha$, donc A n'est pas extrémal dans $\mathfrak{B}$.
. On vient de montrer dans cette partie **F** que $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $(M_n(\mathbb{R}), \|.\|_2)$.