

EPREUVE e3a PSI 2010, MATH A en 3 h

Calculatrice interdite

Applications directe du cours

1. Si f est paire, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.

Dérivons alors cette expression : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f'(-x)$, ce qui signifie que f' est impaire.

2. De même, si f est impaire, alors f' est paire.

3. 3.1. Il est évident que H est une application linéaire de E dans E et que $H \circ H = Id_E$:

H est donc une symétrie vectorielle de E .

- 3.2. On sait alors que H est la symétrie vectorielle par rapport à $\text{Ker}(H - Id_E)$, parallèlement à $\text{Ker}(H + Id_E)$.

Tout élément u de E s'écrit alors de façon unique comme $u = v + w$ avec $v \in \text{Ker}(H - Id_E)$ et $w \in \text{Ker}(H + Id_E)$. Or $v \in \text{Ker}(H - Id_E) \Leftrightarrow H(v) = v \Leftrightarrow v$ est une fonction paire. Et $w \in \text{Ker}(H + Id_E) \Leftrightarrow H(w) = -w \Leftrightarrow w$ est une fonction impaire.

On obtient donc que tout élément de E se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

4. La réciproque de la question 1. est vraie :

soit f dans E avec f' impaire. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$.

Donc $f(-x) = f(0) + \int_0^{-x} f'(t) dt$.

Effectuons alors le changement de variable $u = -t$:

$f(-x) = f(0) + \int_0^x f'(-u)(-du) = f(0) + \int_0^x f'(u)(du) = f(x)$, car f' est impaire.

On en déduit que f est paire : la réciproque est vraie.

La réciproque de la question 2. est fautive comme le montre l'exemple suivant :

$f : x \mapsto x + 2010$ n'est pas impaire, alors que sa dérivée est $f' : x \mapsto 1$ est impaire.

5. Soit f une solution de l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = 1 + \sin(2x)$.

Avec la question 3., f s'écrit de façon unique $f = g + h$ avec g paire et h impaire.

En remplaçant dans l'équation, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + h''(x) + g(x) - h(x) = 1 + \sin(2x)$

Par unicité de la décomposition d'une fonction comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} g''(x) + g(x) = 1 \\ h''(x) - h(x) = \sin(2x) \end{cases}$$

On doit donc résoudre deux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

Pour la première équation : $g''(x) + g(x) = 1$: l'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$, de racines complexes $\pm i$. On sait alors que les solutions de l'équation homogène associée sont $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$. De plus $x \mapsto 1$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. On en déduit qu'il existe deux réels, λ et μ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1 + \lambda \cos x + \mu \sin x$. De plus,

la fonction g cherchée doit être paire donc $\mu = 0$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1 + \lambda \cos x$.

Pour la seconde équation : $h''(x) - h(x) = \sin(2x)$. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$, de racines réelles ± 1 . On sait alors que les solutions de l'équation homogène associée sont $x \mapsto \lambda \cosh x + \mu \sinh x$. Il reste à trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.

Pour cela considérons le second membre sous la forme $x \mapsto e^{2ix}$. Comme $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de l'équation sous la forme $x \mapsto \lambda e^{2ix}$ avec λ constante. En remplaçant, on a $\forall x \in \mathbb{R}, (-4\lambda - \lambda)e^{2ix} = e^{2ix}$, soit $-5\lambda = 1$ soit encore $\lambda = -\frac{1}{5}$. D'où $x \mapsto -\frac{1}{5}e^{2ix}$ est solution particulière de $h''(x) - h(x) = e^{2ix}$, ce qui donne en prenant la partie imaginaire, $x \mapsto -\frac{1}{5}\sin(2x)$ est solution particulière de $h''(x) - h(x) = \sin(2x)$.

On en déduit qu'il existe deux réels, λ et μ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = -\frac{1}{5}\sin(2x) + \lambda \cosh x + \mu \sinh x$.

De plus, la fonction h cherchée doit être impaire donc $\mu = 0$:

il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = -\frac{1}{5}\sin(2x) + \lambda \sinh x$.

On obtient alors qu'il existe deux réels, α et β tel que $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{5}\sin(2x) + \alpha \cos x + \beta \sinh x$.

Réciproquement, on vérifie facilement qu'une telle fonction est solution.

Préliminaires

1. L'application est linéaire par linéarité de la dérivation des fonctions. De plus, comme $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, φ est bien un endomorphisme de E .
2. Soit $h \in E$. Soit $y \in E$. $\varphi(y) = h \Leftrightarrow y'' + \lambda y = h$. Il s'agit donc de résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre. On sait que l'ensemble des solutions de cette équation est un espace affine de dimension 2. De plus, h étant $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, y l'est aussi par récurrence simple. Il existe donc bien $y \in E$, tel que $\varphi(y) = h$.
3. On vient donc de démontrer que φ est surjective.
4. Trouvons le noyau de φ : $\text{Ker} \varphi$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, équation linéaire du second ordre : $y'' + \lambda y = 0$ qui est de $\dim 2$: $\text{Ker} \varphi$ est donc de dimension 2.
5. L'équation caractéristique associée est $r^2 + \lambda = 0$.
 - $\lambda > 0$ Les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées : $\pm i\sqrt{\lambda}$. On sait alors qu'une base des solutions est $(x \mapsto \cos \sqrt{\lambda}x, x \mapsto \sin \sqrt{\lambda}x)$. La première fonction est paire, la seconde impaire et forme une base de $\text{Ker} \varphi$.
 - $\lambda = 0$ La racine double de l'équation caractéristique est 0. On sait alors qu'une base des solutions est $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$. La première fonction est paire, la seconde impaire et forme une base de $\text{Ker} \varphi$.
 - $\lambda < 0$ Les racines de l'équation caractéristique sont réelles : $\pm \sqrt{-\lambda}$. On sait alors qu'une base des solutions est $(x \mapsto \cosh \sqrt{-\lambda}x, x \mapsto \sinh \sqrt{-\lambda}x)$. La première fonction est paire, la seconde impaire et forme une base de $\text{Ker} \varphi$.
6. D'après le cours, c'est un espace affine de dimension 2. Il reste à trouver une solution particulière.
 - $\lambda > 0$ On remarque que $x \mapsto \frac{1}{2\lambda}$ est solution particulière. L'ensemble des solutions est donc $\{x \mapsto \frac{1}{2\lambda} + \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \sin \sqrt{\lambda}x / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
 - $\lambda = 0$ Il faut trouver une solution particulière de l'équation $y'' = \frac{1}{2}$. Par ex, la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{4}$ convient.

L'ensemble des solutions est donc $\{x \mapsto \frac{x^2}{4} + \alpha + \beta x / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\lambda < 0$ On remarque que $x \mapsto \frac{1}{2\lambda}$ est encore solution particulière.

L'ensemble des solutions est donc $\{x \mapsto \frac{1}{2\lambda} + \alpha \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}x + \beta \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}x / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

7. 7.1. $\boxed{\lambda > 0}$

On a vu que $\text{Ker}\varphi = \{x \mapsto \alpha \cos \sqrt{\lambda}x + \beta \sin \sqrt{\lambda}x / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

Les fonctions cos et sin étant bornées, on a

$$\text{Ker}\varphi \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

$\boxed{\lambda = 0}$ On a $\text{Ker}\varphi = \{x \mapsto \alpha + \beta x / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$. Or la fonction $x \mapsto \alpha + \beta x$ est bornée si et seulement si $\beta = 0$.

On a donc

$$\text{Ker}\varphi \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{x \mapsto \alpha / \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

$\boxed{\lambda < 0}$

On a vu que $\text{Ker}\varphi = \{x \mapsto \alpha \text{ch}\sqrt{-\lambda}x + \beta \text{sh}\sqrt{-\lambda}x / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

Or, $x \mapsto \alpha \text{ch}\sqrt{-\lambda}x + \beta \text{sh}\sqrt{-\lambda}x$ est bornée si et seulement si $\alpha = \beta = 0$. En effet, la limite de cette fonction en $+\infty$ est $+\infty$ sauf si $\alpha + \beta = 0$ et dans ce cas, elle vaut 0. De même, la limite en $-\infty$ est $\pm\infty$ sauf si $\alpha - \beta = 0$ et dans ce cas, elle vaut 0.

La fonction est donc bornée si et seulement si $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$ si et seulement si $\alpha = \beta = 0$ donc

$$\text{Ker}\varphi \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$$

7.2. Dans les deux premiers cas, l'intersection n'est pas réduite au singleton $\{0\}$: il ne peut pas y avoir somme directe.

Dans le troisième cas, l'intersection est réduite au singleton $\{0\}$: il y a somme directe.

7.3. On suppose donc $\boxed{\lambda < 0}$.

Supposons aussi qu'il existe $f \in \text{Ker}\varphi$ et $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x = f(x) + g(x)$.

Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} x = \alpha \text{ch}\sqrt{-\lambda}x + \beta \text{sh}\sqrt{-\lambda}x + g(x)$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, x = \frac{\alpha + \beta}{2}e^x + g(x) + \frac{\alpha - \beta}{2}e^{-x}$.

Trouvons alors un équivalent en $+\infty$:

Si $\frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0, \frac{\alpha + \beta}{2}e^x \rightarrow \pm\infty, g$ est bornée et $e^{-x} \rightarrow 0$. On en déduit un équivalent de x :

$x \sim \frac{\alpha + \beta}{2}e^x$, ce qui est bien sur impossible.

On en déduit que $\alpha + \beta = 0$.

De même en $-\infty$: on obtient alors $\alpha - \beta = 0$.

On en déduit alors que $\alpha = \beta = 0$, puis que la fonction f est la fonction nulle et donc que $\forall x \in \mathbb{R}, x = g(x)$ avec g bornée, ce qui est impossible.

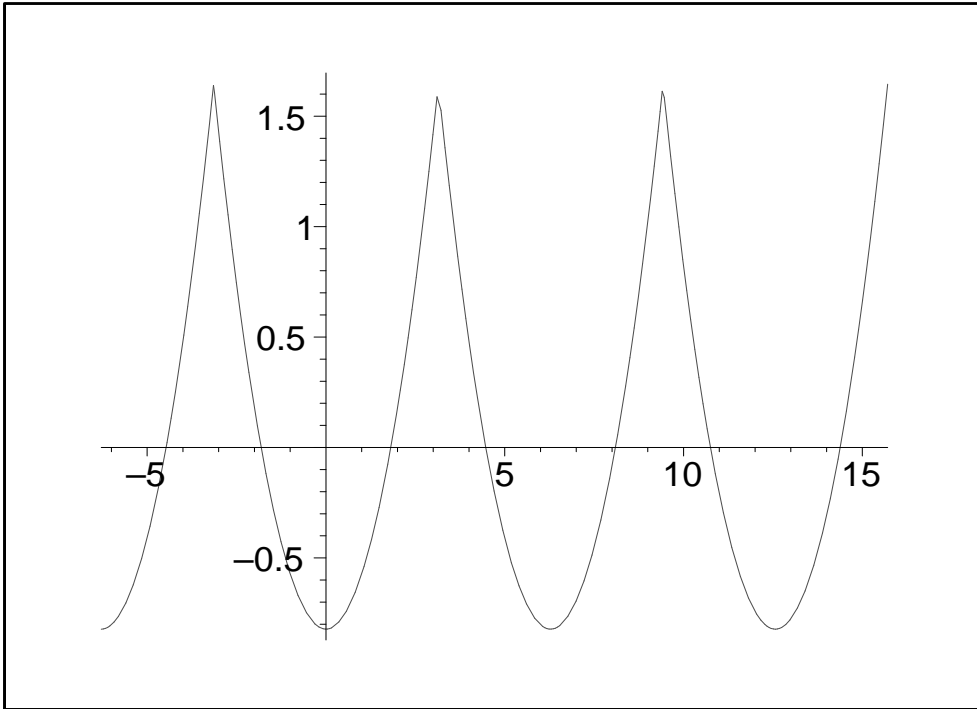
Il n'existe donc pas $f \in \text{Ker}\varphi$ et $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x = f(x) + g(x)$.

7.4. Les espaces $\text{Ker}\varphi$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas en somme directe donc ne peuvent être supplémentaires dans les cas $\lambda > 0$ et $\lambda = 0$.

Enfin, dans le cas $\lambda < 0$, on vient de montrer que la fonction $x \mapsto x$ ne peut pas se décomposer comme somme d'un élément de $\text{Ker}\varphi$ et d'un élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: ces deux espaces ne sont pas supplémentaires.

Partie 1

1. 1.1. On obtient le graphe suivant :



1.2. La fonction f est paire sur $[-\pi, \pi]$ et 2π périodique : elle est donc paire sur \mathbb{R} :

les coefficients b_n sont donc nuls.

De plus, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (3x^2 - \pi^2)/12 \, dx = \frac{1}{6\pi} [x^3 - \pi^2 x]_0^\pi = 0$.

Enfin, si $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (3x^2 - \pi^2)/12 \cos(nx) \, dx = \frac{1}{6\pi} \int_0^\pi (3x^2 - \pi^2) \cos(nx) \, dx.$$

Effectuons alors des intégrations par parties successives, toutes les fonctions étant \mathcal{C}^∞ .

$$a_n = \frac{1}{6\pi} \int_0^\pi (3x^2 - \pi^2) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{6\pi n} [(3x^2 - \pi^2) \sin(nx)]_0^\pi - \frac{1}{6\pi n} \int_0^\pi 6x \sin(nx) \, dx.$$

$$a_n = -\frac{1}{6\pi n} \int_0^\pi 6x \sin(nx) \, dx = \frac{1}{6\pi n^2} [6x \cos(nx)]_0^\pi - \frac{1}{6\pi n^2} \int_0^\pi 6 \cos(nx) \, dx = \frac{1}{6\pi n^2} [6x \cos(nx)]_0^\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{6\pi n^2} 6\pi \cos(n\pi) = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

D'où : $a_0 = 0$ et si $n \geq 1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

1.3. La fonction f est 2π périodique, continue et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux : on peut appliquer le théorème de convergence normale : la série de Fourier de f converge normalement vers f .

1.4. Appliquons le critère spécial des séries alternées : la suite $(\frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$ décroît et tend vers 0 : la

série $\sum_{n \geq 1} (\frac{(-1)^n}{n^2})$ converge.

On a avec la convergence de la série de Fourier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

En particulier pour $x = 0$, on a : $f(0) = -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. d'où $\beta = \frac{\pi^2}{12}$.

1.5. Soit $\varepsilon > 0$. La quantité $\beta - \sum_{n=1}^q \frac{(-1)^n}{n^2}$ designe le reste d'indice q de la série. Par le critère

spéciale des séries alternées, on a la majoration suivante : $|\beta - \sum_{n=1}^q \frac{(-1)^n}{n^2}| < \frac{1}{(q+1)^2}$.

Il suffit donc que $\frac{1}{(q+1)^2} < \varepsilon$ soit encore $(q+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ soit $q+1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Il suffit donc de prendre par exemple, $q = E(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ pour que $|\sum_{n=1}^q \frac{(-1)^n}{n^2} - \beta| < \varepsilon$

1.6. On a avec la convergence de la série de Fourier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

En particulier pour $x = \pi$, on a : $f(\pi) = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1.7. La fonction f ne peut pas être \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} : elle n'est pas dérivable en π .

En effet, $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $f'(x) = x/2$ donc $f'_g(\pi) = \pi/2$ et $f'_d(\pi) = f'_d(-\pi)$ par périodicité donc $f'_d(\pi) = -\pi/2$.

2. 2.1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}$.

Cette fonction est bien définie :

en effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|(-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}| \leq \frac{1}{n^2 + a^2} \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente. La

série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}$ converge donc.

De plus, la majoration précédente est indépendante de x : la série converge donc normalement sur \mathbb{R} donc uniformément sur \mathbb{R} .

De plus, chaque fonction $x \mapsto (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}$ est continue sur \mathbb{R} .

On en déduit que la somme h est continue sur \mathbb{R} .

2.2. On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, avec la question I.1.3, $h(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

Ce qui donne, $h(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (\frac{1}{n^2 + a^2} - \frac{1}{n^2}) \cos(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{-a^2}{(n^2 + a^2)n^2} \cos(nx)$.

Posons alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $v_n(x) = (-1)^n \frac{-a^2}{(n^2 + a^2)n^2} \cos(nx)$.

On peut alors écrire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$.

2.3. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $v_n(x) = (-1)^n \frac{-a^2}{(n^2 + a^2)n^2} \cos(nx)$.

Chaque fonction v_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$|v_n(x)| = |(-1)^n \frac{-a^2}{(n^2 + a^2)n^2} \cos(nx)| \leq \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n^2} \leq \frac{a^2}{n^4}$.

$$|v'_n(x)| = |(-1)^n \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n^2} n \sin(nx)| \leq \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n} \leq \frac{a^2}{n^3}.$$

$$|v''_n(x)| = |(-1)^n \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n^2} n^2 \cos(nx)| \leq \frac{a^2}{n^2 + a^2} \leq \frac{a^2}{n^2}.$$

A chaque fois, on obtient une majoration indépendante de x : les trois séries convergent normalement donc uniformément sur \mathbb{R} .

On en déduit que la somme $v = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est définie sur \mathbb{R} et est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

2.4. Comme $h = f + v$ avec f de classe \mathcal{C}^2 sur $] -\pi, \pi[$, on obtient avec la question précédente que h est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -\pi, \pi[$.

3. On en déduit aussi que $\forall x \in] -\pi, \pi[$,

$$h''(x) = f''(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v''_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n^2} n^2 \cos(nx)$$

$$h''(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n^2} (n^2 + a^2) \cos(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n^2} a^2 \cos(nx)$$

$$h''(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2}{n^2} \cos(nx) + a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{-a^2}{(n^2 + a^2)n^2} \cos(nx)$$

$$h''(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2}{n^2} \cos(nx) + a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{-a^2}{(n^2 + a^2)n^2} \cos(nx)$$

$$h''(x) = \frac{1}{2} + a^2 f(x) + a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{-a^2}{(n^2 + a^2)n^2} \cos(nx) = \frac{1}{2} + a^2 f(x) + a^2 \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

$$h''(x) = \frac{1}{2} + a^2 h(x).$$

On en déduit que h est solution de l'équation différentielle $y'' - a^2 y = \frac{1}{2}$ sur $] -\pi, \pi[$.

4. De même, on a $\forall x \in] -\pi, \pi[$, $h'(x) = f'(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v'_n(x) = \frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n^2} n \sin(nx)$.

En 0, on a $\boxed{h'(0) = 0}$.

Et à gauche en π , $h'_g(\pi) = \frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^2}{(n^2 + a^2)n^2} n \sin(n\pi)$.

donc $\boxed{h'_g(\pi) = \frac{1}{2}\pi}$.

5. Utilisons la résolution de l'équation différentielle vue à la question 6. des préliminaires. Comme a est une racine de a^2 et $-a^2 < 0$:

il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in] -\pi, \pi[$, $h(x) = \frac{1}{2(-a^2)} + \alpha \operatorname{ch} ax + \beta \operatorname{sh} ax$.

Calculons alors $h'(x) = \alpha a \operatorname{sh} ax + \beta a \operatorname{ch} ax$, ce qui donne en 0, $h'(0) = \alpha \beta$ et à gauche en π , $h'_g(\pi) = \alpha a \operatorname{sh} a\pi + \beta a \operatorname{ch} a\pi$.

Utilisons alors les valeurs trouvées au 4. :

On doit résoudre $\begin{cases} h'(0) = \alpha \beta = 0 \\ h'_g(\pi) = \frac{1}{2}\pi = \alpha a \operatorname{sh} a\pi + \beta a \operatorname{ch} a\pi \end{cases}$.

Donc $\beta = 0$ puis $\frac{1}{2}\pi = \alpha a \operatorname{sh}(a\pi)$ puis $\frac{\pi}{2a \operatorname{sh}(a\pi)} = \alpha$.

En remplaçant, $\boxed{\forall x \in] -\pi, \pi[, h(x) = -\frac{1}{2(a^2)} + \frac{\pi}{2a \operatorname{sh}(a\pi)} \operatorname{ch} ax}$.

6. Les fonctions h est ch étant continues sur \mathbb{R} , on peut prolonger la relation précédente aux extrémités de l'intervalle.

Elle est donc valable sur $[-\pi, \pi]$.

7. En particulier, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $h(x) = -\frac{1}{2(a^2)} + \frac{\pi}{2\text{ash}(a\pi)} \text{ch}ax = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2 + a^2}$

En π , on a $h(\pi) = -\frac{1}{2(a^2)} + \frac{\pi}{2\text{ash}(a\pi)} \text{ch}a\pi = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{n^2 + a^2}$ donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2\text{ash}(a\pi)} \text{ch}a\pi.}$$

8. Cette formule est valable pour tout $a \neq 0$. Il reste à passer à la limite quand $a \rightarrow 0$.

Posons pour cela, $f_n(a) = \frac{1}{n^2 + a^2}$, $\forall a \in \mathbb{R}$:

Les fonctions f_n sont continues sur \mathbb{R} .

De plus, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(a)| \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série qui converge.

La série de fonctions converge donc normalement donc uniformément sur \mathbb{R} . La somme est donc continue sur \mathbb{R} : en particulier en 0, on obtient que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{2\text{ash}(a\pi)} \text{ch}a\pi - \frac{1}{2a^2}.$$

Il reste donc à calculer la limite du second membre : $\frac{\pi \text{ch}a\pi}{2\text{ash}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} = \frac{a\pi \text{ch}a\pi - \text{sh}a\pi}{2a^2 \text{sh}(a\pi)}$.

Développons alors le numérateur : $a\pi \text{ch}a\pi - \text{sh}a\pi = a\pi(1 + a^2 \pi^2 / 2) + o(a^2) - (a\pi + o(a^2)) \sim \frac{a^3 \pi^3}{2}$.

Pour le dénominateur, $2a^2 \text{sh}(a\pi) \sim 2a^3 \pi$.

D'où
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Partie 2

1. Soit $a > 0$.

La fonction $h : x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0^+ : $\frac{\sin(ax)}{e^x - 1} \sim \frac{ax}{x} \sim a$: la fonction est donc prolongeable par continuité en 0.

En $+\infty$: $|\frac{\sin(ax)}{e^x - 1}| \leq \frac{1}{e^x - 1} \sim e^{-x}$ qui est une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit que h est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx}$ existe.

2. 2.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \mapsto \sin(ax)e^{-kx}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

En $+\infty$: $|\sin(ax)e^{-kx}| \leq e^{-kx}$ qui est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } J_k \text{ existe pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$.

2.2. L'intégrale J_k est la partie imaginaire de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-kx} e^{iax} dx$.

$$\text{Or } I = \int_0^{+\infty} e^{-kx+iax} dx = \int_0^{+\infty} e^{(-k+ia)x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{(-k+ia)x}}{ia - k} \right]_0^X.$$

$$I = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{(-k+ia)X}}{ia - k} - \frac{1}{ia - k}.$$

$$\text{Or } \left| \frac{e^{(-k+ia)X}}{ia - k} \right| = \frac{e^{-kX}}{|k - ia|} \rightarrow 0 \text{ quand } X \text{ tend vers } +\infty.$$

$$\text{On en déduit que } I = -\frac{1}{ia - k} = \frac{k + ia}{k^2 + a^2}.$$

En prenant la partie imaginaire, $\boxed{J_k = \frac{a}{k^2 + a^2}}$.

3. On définit $R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx - a \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2 + a^2}$:

$$R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx - a \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2 + a^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx - \sum_{k=1}^{n+1} J_k$$

$$R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx - \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \sin(ax) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(ax)}{e^x - 1} - \sum_{k=1}^{n+1} e^{-kx} \sin(ax) \right) dx$$

$$\text{soit finalement } R_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \sum_{k=1}^{n+1} e^{-kx} \right) \sin(ax) dx$$

Or $\sum_{k=1}^{n+1} e^{-kx}$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{-x} différente de 1 si $x \neq 0$:
on a donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} e^{-kx} = e^{-x} \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{e^x - 1}$$

$$\text{D'où en remplaçant, } R_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{e^x - 1} \right) \sin(ax) dx$$

$$\text{soit } \boxed{R_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{e^x - 1} \sin(ax) dx.}$$

4. Appliquons alors le théorème de convergence dominée : notons $\forall x \in]0, +\infty[$, $r_n(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{e^x - 1} \sin(ax)$.

Les fonctions r_n sont continues sur $]0, +\infty[$.

La suite de fonctions (r_n) converge simplement vers la fonction nulle : en effet,

$$\forall x \in]0, +\infty[, |r_n(x)| \leq \left| \frac{e^{-(n+1)x}}{e^x - 1} \right| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

De plus, l'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, +\infty[, |r_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{e^x - 1} |\sin(ax)| \leq \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \varphi(x)$$

La fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$ et est intégrable sur cet intervalle d'après la première question.

Appliquons le théorème de convergence dominée : on en déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.}$

5. On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 + a^2} = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}$

Utilisons alors le résultat de la question 1.7 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = -\frac{1}{2(a^2)} + \frac{\pi}{2\text{ash}(a\pi)} \text{cha}\pi$$

$$\text{On a donc bien } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} dx = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \text{cha}\pi}{2\text{ash}(a\pi)}.}$$