

EPREUVE CCP PSI 2013, MATH II en 4 h

Calculatrice autorisée

PARTIE 1

1. 1.1. La sphère unité $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ est une partie bornée et fermée (image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application norme continue) de $\mathbb{R}^n$: c'est donc un compact.

L'application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie : elle est continue. De plus, le produit scalaire est aussi continu sur $\mathbb{R}^n$ (bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ de dimension finie).

On en déduit par composition que $q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle Ax | x \rangle$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Au final, q_A est continue sur le compact Ω_n et à valeurs réelles :

q_A est donc bornée et atteint ses bornes sur Ω_n .

- 1.2. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \cap sp(A)$: il existe un vecteur $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, que l'on peut prendre unitaire (quitte à le diviser par sa norme), tel que $Ax = \lambda x$.

On a alors $q_A(x) = \langle Ax | x \rangle = \lambda \langle x | x \rangle = \lambda$ car $x \in \Omega_n$.

Par définition de m_A et M_A , on en déduit que $m_A \leq \lambda \leq M_A$ d'où : $\mathbb{R} \cap sp(A) \subset [m_A, M_A]$

- 1.3. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure, les valeurs propres sont les éléments diagonaux : 2 est valeur propre double et $sp(A) = \{2\}$.

Si $x \in \Omega_2$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$.

Calculons $q_A(x)$:

$$q_A(x) = \langle Ax | x \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \cos \theta - \sin \theta \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle = 2 - \sin \theta \cos \theta = 2 - \frac{\sin(2\theta)}{2}.$$

Cette quantité est maximale quand le $\sin(2\theta)$ est minimal et vaut donc -1. On trouve donc $M_A = 2 + 1/2 = 5/2$.

De même, $m_A = 2 - 1/2 = 3/2$.

On vérifie bien que $\mathbb{R} \cap sp(A) \subset [m_A, M_A]$.

2. 2.1. Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

Si $y = 0$, on a bien $q_A(y) = 0$.

Si $y \neq 0$, notons $x = \frac{y}{\|y\|} \in \Omega_n$.

On a alors $q_A(x) = 0 = q_A\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \left\langle A \frac{y}{\|y\|} \middle| \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \frac{q_A(y)}{\|y\|^2}$.

On en déduit que $q_A(y) = 0$ et au final, $q_A(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$

- 2.2. Soient y et z dans $\mathbb{R}^n$. Par bilinéarité du produit scalaire,

$$q_A(y+z) = 0 = \langle A(y+z) | y+z \rangle = \langle Ay | y \rangle + \langle Ay | z \rangle + \langle Az | y \rangle + \langle Az | z \rangle$$

$$q_A(y+z) = 0 = \langle Ay | z \rangle + \langle Az | y \rangle \text{ avec la question précédente.}$$

$$\text{donc } \langle Ay | z \rangle + \langle Az | y \rangle = 0$$

- 2.3. Prenons alors $y = e_j$ et $z = e_k$ avec $1 \leq k, j \leq n$.

$$\text{Si on calcule } \langle Ay | z \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \text{ (ligne } k) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = a_{k,j}.$$

De même, $\langle Az|y \rangle = a_{j,k}$.

On a donc $\forall (j,k) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{k,j} = -a_{j,k}$: la matrice A est antisymétrique.

3. On suppose que A est une matrice symétrique.

Le sens $A = (0)$ implique $\forall x \in \Omega_n$, $q_A(x) = 0$ est évident.

Supposons que $\forall x \in \Omega_n$, $q_A(x) = 0$.

Par la question I.2.3, A est antisymétrique.

Or par hypothèse A est aussi symétrique donc ${}^t A = A = -A$ donc $A = (0)$.

4. Avec la question I.1.1, on peut bien définir $N : S_n(R) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $A \mapsto \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$.

Montrons que l'on définit bien une norme.

– Soit $A \in S_n(R)$ et $\lambda \in R$:

$$N(\lambda A) = \sup_{x \in \Omega_n} |\langle \lambda A x | x \rangle| = \sup_{x \in \Omega_n} |\lambda \langle A x | x \rangle| = |\lambda| \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = |\lambda| N(A).$$

– Soit $A, B \in S_n(R)$.

$$\text{Pour tout } x \in \Omega_n, q_{A+B}(x) = \langle (A+B)x | x \rangle = \langle Ax | x \rangle + \langle Bx | x \rangle = q_A(x) + q_B(x).$$

En passant à l'inégalité triangulaire et par définition de $N(A)$ et $N(B)$,

$$|q_{A+B}(x)| \leq |q_A(x)| + |q_B(x)| \leq N(A) + N(B).$$

Ceci étant valable $x \in \Omega_n$, on en déduit que $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

– Soit A dans $S_n(R)$.

Enfin, si $A = (0)$, il est évident que $N(A) = 0$.

et si $N(A) = 0$, $\forall x \in \Omega_n$, $q_A(x) = 0$ et par I.1.3, $A = (0)$.

Au final, $N : S_n(R) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $A \mapsto \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)|$ est bien une norme.

5. 5.1. En calculant, $q_A(e_k) = \langle Ae_k | e_k \rangle = \lambda_k \langle e_k | e_k \rangle = \lambda_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

5.2. Soit $x = \sum_{k=1}^n x'_k e_k$. Comme la base $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée, on a alors

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = 1 \text{ car } x \in \Omega_n.$$

De plus, par bilinéarité,

$$\begin{aligned} q_A(x) &= \langle Ax | x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x'_k Ae_k \middle| \sum_{j=1}^n x'_j e_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x'_k \lambda_k e_k \middle| \sum_{j=1}^n x'_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x'_k x'_j \lambda_k \langle e_k | e_j \rangle. \end{aligned}$$

Or la base $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée, $\langle e_k | e_j \rangle = \delta_{k,j}$ donc

$$\boxed{q_A(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x'_k)^2.}$$

5.3. Comme $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ et que les $(x'_k)^2 \geq 0$, on a en encadrant,

$$\lambda_1 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 \cdot \lambda_1 \leq q_A(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x'_k)^2 \leq \lambda_n \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = \lambda_n.$$

On a donc pour tout $x \in \Omega_n$, $\lambda_1 \leq q_A(x) \leq \lambda_n$.

De plus, $q_A(e_1) = \lambda_1$ et $q_A(e_n) = \lambda_n$ avec $e_1, e_n \in \Omega_n$.

On en déduit que q_A est bornée sur Ω_n et atteint ses bornes : on retrouve le résultat de la question I.1.1.

De plus, $m_A = \lambda_1$ et $M_A = \lambda_n$.

5.4. On en déduit que $N(A) = \sup_{x \in \Omega_n} |q_A(x)| = \max(|\lambda_1|, |\lambda_n|) = \max_{\lambda \in (A)} |\lambda|$.

$$\text{Enfin, comme } \det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k, \quad \boxed{|\det(A)| = \prod_{k=1}^n |\lambda_k| \leq N(A)^n.}$$

5.5. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$, on trouve $\det A = 1/12$ et comme le polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4/3\lambda + 1/12$, on trouve comme valeurs propres, $\frac{4 \pm \sqrt{13}}{6}$.
On a donc $N(A) = \frac{4 + \sqrt{13}}{6}$.

PARTIE 2

1. 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n : q_n(x) = \langle H_n x | x \rangle = \sum_{k=1}^n (H_n x)_k x_k$ où $(H_n x)_k$ désigne la k ième coordonnées de $H_n x$.

$$\text{Or, } (H_n x)_k = \sum_{i=1}^n a_{k,i} x_i.$$

$$\text{On a donc } q_n(x) = \langle H_n x | x \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{k,i} x_i x_k = \sum_{1 \leq k, i \leq n} \frac{x_i x_k}{i+k-1}.$$

1.2. Développons :

$$P(t) = \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) = (x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \dots + x_n t^{n-1}) (x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \dots + x_n t^{n-1})$$

C'est un polynôme en t de degré maximum $2n-1$ et en développant :

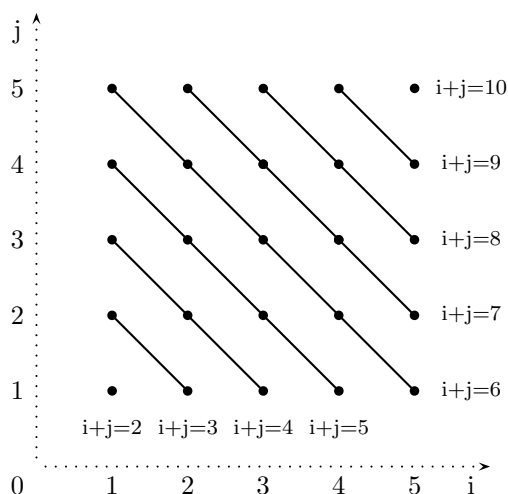
$$P(t) = \sum_{p=0}^{2n-1} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n, i+j=p+2} x_i x_j \right) t^p.$$

1.3. Intégrons ceci entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P(t) dt &= \sum_{p=0}^{2n-1} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n, i+j=p+2} x_i x_j \right) \int_0^1 t^p dt. \\ &= \sum_{p=0}^{2n-1} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n, i+j=p+2} x_i x_j \right) \frac{1}{p+1} = \sum_{p=0}^{2n-1} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n, i+j=p+2} x_i x_j \frac{1}{p+1} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{2n-1} \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n, i+j=p+2} x_i x_j \frac{1}{i+j-1} \right) \end{aligned}$$

Dessinons le domaine de sommation :

$0 \leq p \leq 2n-1$ et $1 \leq i, j \leq n, i+j = p+2$: c'est le carré de côté $\{1, \dots, n\}$ dont on somme les éléments suivant les diagonales :



Il s'agit donc aussi de la somme de tous les éléments du carré et donc

$$\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \frac{1}{i+j-1} = q_n(x) \text{ par II.1.1.}$$

1.4. Comme $\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 \geq 0$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^n, q_n(x) \geq 0$.

De plus, si $x = 0$, il est évident que $q_n(x) = 0$.

Et si $q_n(x) = 0$, alors $\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt = 0$.

Or l'application $t \mapsto \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2$ est continue (polynomiale), positive sur $[0, 1]$, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. C'est donc la fonction nulle sur $[0, 1]$.

La fonction polynomiale $t \mapsto \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$ a une infinité de racines : c'est donc le polynôme nul.

Tous ses coefficients sont donc nuls : $\forall 1 \leq k \leq n, x_k = 0$ et donc $\boxed{x = 0}$.

De plus, comme par I.5.1, avec les notations de cette question, $q_n(e_k) = \lambda_k$, on en déduit que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

2. 2.1. Calculons $\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1}{k+1} [t^{k+1}]_{-1}^1 = \frac{1}{k+1} (1 - (-1)^{k+1})$.

$$\begin{aligned} \text{De plus, } -i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta &= -i \int_0^\pi e^{i(k+1)\theta} d\theta = \frac{-i}{i(k+1)} [e^{i(k+1)\theta}]_0^\pi = \frac{-1}{k+1} (e^{i(k+1)\pi} - 1) \\ &= \frac{1}{k+1} (1 - (-1)^{k+1}). \end{aligned}$$

Ces deux intégrales sont donc égales et par linéarité de l'intégrale, on en déduit par combinaison linéaire que :

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P, \int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(i\theta) e^{i\theta} d\theta}$$

2.2. On a alors avec II.1.3,

$$0 \leq q_n(x) = \int_{-1}^1 Q(t)^2 dt \leq \int_{-1}^1 Q(t)^2 dt \text{ car on intègre une fonction réelle positive.}$$

Utilisons alors la question précédente :

$$\int_{-1}^1 Q(t)^2 dt = \left| \int_{-1}^1 Q(t)^2 dt \right| = \left| -i \int_0^\pi Q^2(i\theta) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |Q^2(i\theta)| |e^{i\theta}| d\theta = \int_0^\pi |Q(i\theta)|^2 d\theta.$$

Si $x = 0$, l'inégalité précédente est une égalité.

Si la première inégalité précédente est une égalité, on a par II.1.4, $x = 0$.

Si la seconde inégalité précédente est une égalité, on a alors $\int_{-1}^0 Q(t)^2 dt = 0$, ce qui donne avec un raisonnement analogue à celui de II.1.4, $x = 0$.

2.3. Calculons le second membre en calculant d'abord :

$$\begin{aligned} |Q(i\theta)|^2 &= \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^n x_j e^{i(j-1)\theta} \right)} \\ |Q(i\theta)|^2 &= \left(\sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j e^{-i(j-1)\theta} \right) = \sum_{1 \leq k, j \leq n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} \\ |Q(i\theta)|^2 &= \sum_{1 \leq k \leq n} (x_k)^2 + \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} + \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta}. \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, permutons les deux indices par un changement de variables.

On a alors $\sum_{1 \leq j < k \leq n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} = \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j e^{i(j-k)\theta}$ et en regroupons avec l'autre somme,

$$\sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} + \sum_{1 \leq k > j \leq n} x_k x_j e^{i(k-j)\theta} = \sum_{1 \leq k < j \leq n} x_k x_j 2 \cos((k-j)\theta).$$

Intégrons maintenant tout ceci entre 0 et π : il ne reste pas grand chose car

$$\text{si } k \neq j, \int_0^\pi 2 \cos((k-j)\theta) d\theta = 0.$$

Au final,

$$\boxed{\int_0^\pi |Q(i\theta)|^2 d\theta = \int_0^\pi \sum_{1 \leq k \leq n} (x_k)^2 d\theta = \pi \sum_{1 \leq k \leq n} (x_k)^2 = \pi \|x\|^2.}$$

Comme on a calculé de façon exacte le second membre de II.2.2, on a l'inégalité stricte pour $x \neq 0$.

- 3. 3.1.** On a $\mu_2 = \frac{4 - \sqrt{13}}{6}$ et $\rho_2 = \frac{4 + \sqrt{13}}{6}$ car H_2 est la matrice de la question I.5.5.

Comme μ_n et ρ_n sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de H_n , avec les notations de la question I.5 il existe e_1 et e_n , vecteurs orthonormés tels que $H_n(e_1) = \mu_n e_1$ et $H_n(e_n) = \rho_n e_n$.

Or par I.5.1, $q_n(e_1) = \mu_n$ et $q_n(e_n) = \rho_n$.

Avec la question II.2.3, les vecteurs étant non nuls, $0 < \mu_n \leq \rho_n < \pi$.

De plus, si $\mu_n = \rho_n$, H_n a une unique valeur propre μ et comme H_n est diagonalisable, elle est semblable à μI_n donc égale à μI_n , ce qui est impossible.

On a donc $\boxed{0 < \mu_n < \rho_n < \pi.}$

- 3.2.** Par la question I.5.2, on a déjà que si $x \in \Omega_n$, $\mu_n \leq q_n(x) \leq \rho_n$ donc $q_n(\Omega_n) \subset [\mu_n, \rho_n]$.

Soit maintenant un réel λ de $[\mu_n, \rho_n]$: il existe t dans $[0, 1]$ tel que $\lambda = (1-t)\mu_n + t\rho_n$.

Reprenons les vecteurs e_1 et e_n de la question précédente et considérons $x = \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n$.

Comme (e_1, e_n) est une famille orthogonale, $\|x\|^2 = (1-t) + t = 1$ donc $x \in \Omega_n$.

De plus, $q_n(x) = \langle \sqrt{1-t}\mu_n e_1 + \sqrt{t}\rho_n e_n | \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n \rangle = (1-t)\mu_n + t\rho_n = \lambda$ car (e_1, e_n) est orthogonale.

On a donc $q_n(x) = \lambda$ avec $x \in \Omega_n$ donc $\lambda \in q_n(\Omega_n)$ et $\boxed{q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n].}$

- 3.3.** Après calculs, $q_n(e_n) = \langle H_n e_n | e_n \rangle = \frac{1}{2n-1}$.

Comme $0 < \mu_n \leq q_n(e_n) = \frac{1}{2n-1}$, on obtient par passage à la limite que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0$

PARTIE 3

- 1. 1.1.** Posons $(x, y) = (u^2, v^2)$: le jacobien de ce changement de variable est

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 4uv \neq 0.$$

On obtient bien un C^1 difféomorphisme $(u, v) \rightarrow (u^2, v^2)$, de Γ_n sur le domaine D_n . Utilisons la formule de changement de variable sur les intégrales doubles :

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)} dx dy = \iint_{\Gamma_n} \frac{|4uv|}{uv(u^2+v^2-1)} du dv$$

$$I_n = \iint_{\Gamma_n} \frac{4}{u^2+v^2-1} du dv \geq \iint_{\Gamma_n} \frac{4}{u^2+v^2} du dv = 4J_n.$$

- 1.2.** $J_n = \iint_{\Gamma_n} \frac{1}{u^2+v^2} du dv = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{u^2+v^2} du \right) dv = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} [\arctan \frac{u}{v}]_1^{\sqrt{n}} dv.$

$$J_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan \frac{\sqrt{n}}{v} dv - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan \frac{1}{v} dv.$$

Utilisons alors la propriété rappelée sur $\arctan$:

$$J_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{v}{\sqrt{n}} \right) dv - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan v \right) dv = - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan \frac{v}{\sqrt{n}} dv + \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan v dv = K_n - L_n.$$

2. 2.1. On sait que si $t \geq 0$, $0 \leq \arctan t \leq t$, on en déduit que

$$0 \leq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan \frac{v}{\sqrt{n}} dv \leq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \frac{v}{\sqrt{n}} dv \leq 1.$$

De plus, $L_n > 0$ car on intègre une fonction continue positive non identiquement nulle.

2.2. La fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x} \arctan \frac{1}{x}$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$.

En $+\infty$, $h(x) \sim \frac{1}{x^2}$ car en O^+ , $\arctan u \sim u$. Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par comparaison avec les intégrales de Reimann, on en déduit que h est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ecrivons alors

$$K_n = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan v dv = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} (-\arctan 1/v + \frac{\pi}{2}) dv = - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{v} \arctan 1/v dv + \frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{n})$$

L'intégrale converge vers un réel et est négligeable devant le terme $\frac{\pi}{2} \ln(\sqrt{n})$ qui tend vers $+\infty$.

On en déduit $\boxed{K_n \sim \frac{\pi}{4} \ln n.}$

2.3. Enfin, $J_n = K_n - L_n$, avec la suite (L_n) bornée qui est donc négligeable devant $K_n \sim \frac{\pi}{4} \ln n$.

On en déduit $\boxed{J_n \sim \frac{\pi}{4} \ln n.}$

3. 3.1. Calculons $\|a\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On sait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $[1, +\infty[$. Soit $k \geq 1$. Si $x \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x}$.

Intégrons entre k et $k+1$: $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$

Puis sommons de $k=1$ à $n-1$: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n)$ (somme télescopique)

On en déduit que $\boxed{\|a\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).}$

3.2. Calculons $q_n(a) = \sum_{1 \leq k, i \leq n} \frac{a_i a_k}{i+k-1} = \sum_{1 \leq k, i \leq n} \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)}$.

Considérons déjà, à k fixé, $\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)}$.

L'application continue $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{xk}(x+k-1)}$ décroît sur $[i, i+1]$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{xk}(x+k-1)} \leq \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)} \text{ sur } [i, i+1].$$

Intégrons entre i et $i+1$

$$\int_i^{i+1} \frac{1}{\sqrt{xk}(x+k-1)} dx \leq \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)},$$

puis sommons de 1 à $n-1$: $\int_1^n \frac{1}{\sqrt{xk}(x+k-1)} dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)}$.

Faisons maintenant la même chose par rapport à k .

L'application $h : y \mapsto \int_1^n \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)} dx$ est continue et décroissante : sur $[k, k+1]$, on a

$h(y) \leq h(k)$, puis en intégrant sur $[k, k+1]$, on a

$$\int_k^{k+1} \left(\int_1^n \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)} dx \right) dy \leq h(k).$$

Sommons alors pour k allant de 1 à $n-1$:

$$\int_1^n \left(\int_1^n \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)} dx \right) dy \leq \sum_{k=1}^{n-1} h(k) \leq \sum_{k=1}^n h(k) \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)}.$$

On obtient au final :

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{xy}(x+y-1)} dx dy \leq \sum_{1 \leq k, i \leq n} \frac{1}{\sqrt{ik}(i+k-1)} = q_n(a).$$

Et avec III.1.1, $4J_n \leq q_n(a)$.

3.3. Comme $\frac{a}{\|a\|}$ est dans Ω_n , $q_n(\frac{a}{\|a\|}) \leq N(H_n)$.

$$\text{Or, } q_n(\frac{a}{\|a\|}) = \frac{q_n(a)}{\|a\|^2} \geq \frac{4J_n}{1 + \ln n}$$

De plus, $J_n \sim \frac{\pi}{4} \ln n$ donc $\frac{4J_n}{1 + \ln n} \sim \pi$.

De plus, par la majoration de II.2.3, on sait que $\frac{4J_n}{1 + \ln n} \leq N(H_n) \leq \pi$.

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(H_n) = \pi$.

PARTIE 4

1. On sait que $\lambda_{n,n} = [(x+n)Rn(x)](-n) = \frac{(-n-1)\dots(-n-n)}{(-n)\dots(-1)} = \frac{(n+1)\dots(2n)}{n\dots 2.1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$

donc $\lambda_{n,n} = \binom{2n}{n}$

2. 2.1. Calculons $R_{n-1}(i) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_{k,n-1}}{i+k} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_{k-1,n-1}}{i+k-1} = \sum_{k=1}^n \lambda_{k-1,n-1} h_{i,k}$.

Remarque : l'énoncé ne précise pas ce qu'est $h_{i,k}$ mais on comprend bien qu'il s'agit du terme générique de la matrice (H_n) , à savoir $h_{i,k} = \frac{1}{i+k-1}$

Si on regarde la dernière colonne de A , elle est composée des :

$$R_{n-1}(i) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{k-1,n-1} h_{i,k}}_{\text{c.l. des n-1 premières colonnes de A}} + \lambda_{n-1,n-1} h_{i,n}.$$

Le déterminant étant multilinéaire alterné, on en déduit que le déterminant de A est celui de la matrice obtenue en remplaçant sa dernière colonne par la colonne des $\lambda_{n-1,n-1} h_{i,n}$. On peut sortir le coefficient $\lambda_{n-1,n-1}$ pour obtenir que $\det A = \lambda_{n-1,n-1} \det(H_n)$.

Soit encore $\det A = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n)$.

2.2. Calculons directement les éléments de la dernière colonnes de A :

Si $i \neq n$, i est racine de R_{n-1} : $R_{n-1}(i) = 0$.

$$\text{Et si } i = n, R_{n-1}(n) = \frac{(n-1)\dots 1}{n\dots(2n-1)} = \frac{(n-1)!^2}{(2n-1)!} = \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!(2n-1)}.$$

Développons alors $\det A$ par rapport à sa dernière colonne :

$$\det A = R_{n-1}(n) \det(H_{n-1}) = \frac{(n-1)!^2}{(2n-2)!(2n-1)} \det(H_{n-1}) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1}}.$$

On en déduit que $\det(H_n) = \frac{\det(H_{n-1})}{(2n-1) \left[\binom{2(n-1)}{n-1} \right]^2}$.

2.3. Par II.3.1, les valeurs propres de H_n sont strictement positives et comme H_n est diagonalisable, $\det H_n > 0$.

On a vu aussi que $\frac{1}{\det(H_2)} = 12$.

Par récurrence immédiate, à l'aide de IV.2.2, on en déduit que : que $\frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$.

3. Par simple récurrence, on obtient la formule demandée.