

Première partie

1. L'égalité $\text{Det } A = \text{Det } {}^t A$ donne ici $\text{Det } A = (-1)^n \text{Det } A$, d'où, si n impair, $\text{Det } A = 0$.
2. Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$ et $d_1, \dots, d_m$ les éléments diagonaux de D . Soit $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{2m})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$ et considérons la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_{m+1}, \dots, e_k, e_{m+k}, \dots, e_{2m-1}, e_{2m})$. On voit que chaque sous-espace vectoriel $\text{Vect}(e_k, e_{m+k})$ est stable pour l'endomorphisme $X \mapsto AX$ qui a donc dans la base $\mathcal{B}'$ pour matrice une matrice A' semblable diagonale par blocs :

$$A' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -d_1 \\ d_1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & -d_2 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -d_m \\ d_m & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Les déterminants de A et A' sont les mêmes, et, par blocs : $\text{Det } A = \text{Det } A' = d_1^2 \cdot d_2^2 \cdots d_m^2 = (\text{Det } D)^2$.

3. Pour tout $x \in E$, par définition de l'adjoint, on a :

$$0 = (x \mid f^2(x)) = (-f(x) \mid f(x)) = -\|f(x)\|^2,$$

d'où par définie-positivité du produit scalaire, $f(x) = 0$, et par suite $f = 0$.

4.

- a) Par hypothèse, $f^* f = -f f = id_E$, ce qui exprime bien que f est orthogonale.
- b) Comme ci-dessus, en notant n la dimension de E , on déduit de $f^* = -f$ et de $\text{Det } f^* = \text{Det } f$ que $(-1)^n \text{Det } f = \text{Det } f$, or ici $\text{Det } f = \pm 1 \neq 0$, donc nécessairement n est pair.
- c) Pour tout vecteur $v \in E$ on a $(v \mid f(v)) = 0$: en effet, par $f^* = -f$ on a $(v \mid f(v)) = -(v \mid f(v))$. De plus, $f(v)$ a même norme que v : $(f(v) \mid f(v)) = -(v \mid f^2(v)) = (v \mid v)$. On en déduit que, quand $v \neq 0$, v et $f(v)$ sont toujours indépendants.
- d) Comme $f^2 = -v$, le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(v, f(v))$ est stable par f . Or, de $f^* = -f$ on déduit que si G_1 est un sous-espace vectoriel stable par f , alors $G_1^\perp$ est aussi stable par f . En effet, pour tout $x \in G_1^\perp$ et tout $y \in G_1$: $(f(x) \mid y) = (x \mid -f(y)) = 0$, ce qui prouve bien que $f(x)$ reste dans $G_1^\perp$. Ici, avec $F = G^\perp$ on a donc bien $f(F) \subset F$.
- e) Montrons par récurrence sur $k \in [1, m]$ la proposition suivante :

$$\exists (v_1, \dots, v_k) \in E^k \text{ tels que le système } G_k = (v_1, \dots, v_k, f(v_1), \dots, f(v_k)) \text{ soit orthonormal.}$$

La proposition est vraie pour $k = 1$ puisque pour v de norme 1, on a vu en **c**) que $f(v)$ est orthogonal à v et de norme 1 aussi.

Supposons la propriété vraie pour $k - 1 < m$, et montrons-la pour k . Comme la taille du système $G_k = (v_1, \dots, v_{k-1}, f(v_1), \dots, f(v_{k-1}))$ est $< n$, il existe un vecteur v non nul dans $(\text{Vect}(G_k))^\perp$, qu'on peut supposer normé (quitte à diviser v par sa norme). Comme en **d**), on voit que puisque G_k est (par $f^2 = -id_E$) stable par f , $f(v)$ reste dans $G_k^\perp$. Mais on a vu aussi que $f(v)$ est orthogonal à v et de même norme 1, donc finalement $G_{k+1} = (v_1, \dots, v_{k-1}, v, f(v_1), \dots, f(v_{k-1}), f(v))$ est un système orthonormal. Donc, par récurrence, G_m est orthonormal, ce qu'on voulait démontrer.

Par définition, la matrice de f dans cette base est : $\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$.

5.

- a) L'endomorphisme $f^2 = -f^* f$ est auto-adjoint, donc à valeurs propres réelles et diagonalisable dans $\mathbb{R}$. La décomposition en somme directe orthogonale $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ est donnée par le théorème spectral.

- b) Soit, pour $1 \leq i \leq k$, e_i un vecteur propre associé à λ_i . On a, par définition : $\lambda_i(e_i | e_i) = (e_i | f^2(e_i)) = -(f(e_i) | f(e_i))$, d'où, puisqu'un vecteur propre est non nul, $\|e_i\|^2 > 0$ et $\lambda_i = -\frac{\|f(e_i)\|^2}{\|e_i\|^2} \leq 0$.
- c) Soit x un vecteur quelconque de E_i : on a $f^2(x) = \lambda_i x$, d'où en composant par f , et par linéarité de f , $f^3(x) = f^2(f(x)) = \lambda_i f(x)$, ce qui signifie bien que $f(x) \in E_i$. Par suite, $f(E_i) \subset E_i$.

6.

- a) Toute matrice $A \in \mathcal{A}_{2m}$ est associée à un endomorphisme $f : X \mapsto AX$ antisymétrique dans $\mathbb{R}^{2m}$ euclidien canonique. Par 5., $\mathbb{R}^{2m}$ se décompose en somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels E_i , stables par f , propres pour f^2 . Ainsi, l'endomorphisme $g_i = f|_{E_i}$ garde les mêmes propriétés d'antisymétrie que f (par restriction de l'égalité $(x | f(y)) = -(f(x) | y)$ aux vecteurs de E_i , et vérifie $g_i^2 = \lambda_i id_{E_i}$ avec $\lambda_i \leq 0$. On peut donc, soit appliquer le 3. si $\lambda_i = 0$, et dans ce cas $g_i = 0$, soit appliquer le 4. à $h_i = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} g_i$ car h_i vérifie bien $h_i^2 + id_{E_i} = 0$ et trouver une base orthonormale B_i où la matrice de h_i est $\begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$, ce qui donne pour matrice de g_i , $Mat_{B_i}(g_i) = Mat(f|_{E_i}) = \begin{pmatrix} 0_m & -\sqrt{-\lambda_i} I_m \\ \sqrt{-\lambda_i} I_m & 0_m \end{pmatrix}$. Remarquons que le cas $\lambda_i = 0$ ne peut arriver qu'une fois (les λ_i sont distinctes). Une concaténation des bases B_i donne alors une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, avec un bloc éventuel nul, celui-ci étant de plus d'ordre pair puisque tous les autres le sont et que l'ordre total est pair. De plus, chaque base B_i est faite de deux parties égales, en général $B_i = (U_i, V_i = f(U_i))$, sauf pour le cas particulier éventuel $\lambda_i = 0$ où on la coupe arbitrairement en deux sous-systèmes de même cardinal, (U_{i_0}, V_{i_0}) . En réordonnant la base $\mathcal{B}$ en commençant par concaténer les U_i puis en concaténant seulement après les V_i on obtient finalement une base orthonormée $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix},$$

D étant une matrice diagonale avec des $\sqrt{-\lambda_i}$ sur la diagonale. Cette propriété se traduit bien par l'égalité $A = {}^t Q \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix} Q$, où $Q^{-1} = {}^t Q$ est la matrice orthogonale correspondant au changement de base orthonormée (base canonique $\rightarrow$ base $\mathcal{B}'$) indiqué.

- b) Avec les notations ci-dessus, on constate que la matrice $\begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme le produit $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Ainsi, l'égalité du a) peut se réécrire en $A = \underbrace{{}^t Q \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}}_{{}^t M} \times J_{2m} \times \underbrace{\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} Q}_M$, cqfd avec $M = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} Q$. (Remarquons que $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} Q$ convenait aussi).

Deuxième partie

7.

- a) Classique : vient de $\omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = 0$, qu'on développe par linéarité par rapport aux variables $n^o i$ et $n^o(i+1)$.
- b) Pour $k \in [1, q-1]$, on montre par récurrence sur k la propriété P_k :
« pour tout $i \in [1, q-k]$, $\omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{i+k}, \dots, x_q) = 0$ dès que $x_{i+k} = x_i$ ».
 P_1 est vrai par hypothèse. Si P_{k-1} est vraie, alors, quand $x_i = x_{i+k}$ on a par la a) ci-dessus :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{i+k-1}, x_i, \dots, x_q) &= -\omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, x_{i+k-1}, \dots, x_q) \\ &\stackrel{P_{k-1}}{=} 0. \end{aligned}$$

- c) C'est clairement un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications de E^q dans $\mathbb{R}$ (les propriétés de multilinéarité et d'alternance restent stables par combinaison linéaires, la forme nulle est q -linéaire alternée).
- d) Par le cours, c'est la forme $(x_1, \dots, x_q) \mapsto \text{Det}_B(x_1, \dots, x_q)$, le déterminant étant calculé dans une base B quelconque, fixée, de E . (Elle est bien non nulle par $\text{Det}_B(B) = 1$).

8.

- a) Par définition : $\omega^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \omega(x_1, x_2) \cdot \omega(x_3, x_4) - \omega(x_1, x_3) \cdot \omega(x_2, x_4) + \omega(x_1, x_4) \cdot \omega(x_2, x_3)$.
 La linéarité de $\omega^{(2)}$ par rapport à chaque variable x_j est claire, puisque, dans chacun des trois termes ci-dessus, la variable x_j apparaît dans un facteur $\omega(\cdot, \cdot)$ et un seul et que ω est bilinéaire.
 Vérifions l'alternance. Elle résulte de l'anti-symétrie de ω , en effet :
 - si $x_1 = x_2$, le premier terme est nul, les deux suivants se détruisent car opposés l'un de l'autre ;
 - si $x_2 = x_3$, le troisième terme est nul, les deux premiers se détruisent car opposés l'un de l'autre ;
 - si $x_3 = x_4$, le premier terme est nul, les deux suivants se détruisent car opposés l'un de l'autre.
- b) On raisonne par récurrence sur p , le cas $p = 2$ étant acquis par ci-dessus. Supposons donc que $\omega^{(p-1)}$ soit dans Alt_{2p-2} et utilisons la formule de définition de $\omega^{(p)}$ que nous écrivons classiquement sous la forme :

$$\omega^{(p)}(x_1, \dots, x_{2p}) = \sum_{i=2}^{2p} (-1)^i \omega(x_1, x_i) \cdot \omega^{(p-1)}(x_2, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{2p}) \quad (1) .$$

Linéarité par rapport à chaque x_i : acquise par somme d'applications linéaires, puisque x_i apparaît dans un et un seul des deux facteurs de chaque terme de la somme (1) ci-dessus, et que ce facteur est linéaire en x_i .

Propriété d'alternance : on commence par le cas $x_i = x_{i+1}$, $i \geq 2$. Dans ce cas, tous les termes de (1) sauf deux sont nuls, il ne reste que :

$$\omega^{(p)}(x_1, \dots, x_{2p}) = (-1)^i \omega(x_1, x_i) \cdot \omega^{(p-1)}(\dots, x_{i+1}, \dots) + (-1)^{i+1} \omega(x_1, x_{i+1}) \cdot \omega^{(p-1)}(\dots, x_i, \dots) ,$$

et ces deux termes se détruisent quand $x_i = x_{i+1}$.

Reste le cas de $x_1 = x_2$. Le premier terme de (1) disparaît, il reste, en re-développant :

$$\begin{aligned} \omega^{(p)}(x_1, \dots, x_{2p}) &= \sum_{i=3}^{2p} (-1)^i \omega(x_1, x_i) \cdot \omega^{(p-1)}(x_2, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{2p}) \\ &= \sum_{i=3}^{2p} (-1)^i \omega(x_1, x_i) \cdot \sum_{\substack{j \geq 3 \\ j \neq i}} (-1)^{s_j} \omega(x_2, x_j) \cdot \omega^{(p-2)}(\dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots) \quad (2) . \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, le symbole s_j désigne $j-1$ si $j < i$ (en effet, il n'y a plus la variable x_1 dans $\omega^{(p-1)}$, donc le rang de la variable x_j est $j-1$), et $j-2$ si $j > i$ (en effet, alors, le rang de x_j est décalé encore de 1 puisque x_j apparaît après x_i qui a été supprimée). On voit donc que, dans la somme (2) ci-dessus, si $x_2 = x_1$, un même couple (i, j) où $i \neq j$ apparaît dans deux termes identiques $(-1)^i \omega(x_1, x_i) (-1)^{s_j} \omega(x_1, x_j) \cdot \omega^{(p-2)}(\dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots)$, mais qui sont de signes opposés. Donc, pour finir, la somme (2) est nulle et $\omega^{(p)}$ est bien alternée.

9. La bilinéarité est acquise par la linéarité de f et la bilinéarité du produit scalaire, l'anti-symétrie par la définition de $f^* = -f$.

10.

- a) Comme $\omega_f^{(2m)}$ est dans Alt_{2m} , cette forme est proportionnelle à la forme (non nulle) $\text{Det}(x_1, \dots, x_{2m})$, d'où l'existence d'un coefficient de proportionnalité $P(A)$.
- b) D'après ci-dessus, il suffit (toujours) de faire le calcul de $\omega_f^{(2m)}$ pour les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{2m}$, puisqu' alors leur déterminant vaut 1 . En appelant $(e_1, \dots, e_{2m})$ les vecteurs de cette base, il vient :

$$\omega_f^{(2)}(e_1, e_2, e_3, e_4) = (e_1 \mid f(e_2)) \cdot (e_3 \mid f(e_4)) - (e_1 \mid f(e_3)) \cdot (e_2 \mid f(e_4)) + (e_1 \mid f(e_4)) \cdot (e_2 \mid f(e_3)) ,$$

d'où par définition de la matrice de f et des composantes dans une base orthonormée, $P(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$.

- c) Comme avant, $P(A) = \omega_f^{(m)}(e_1, \dots, e_{2m})$. Par la définition de f , seuls les termes $\omega_f(e_k, e_{m+k}) = -d_k$, $1 \leq k \leq m$, sont a priori non nuls, d'où :

$$P(A) = (-1)^{m+1} (-d_1) \omega_f^{(m-1)}(e_2, \dots, e_m, e_{m+2}, \dots, e_{2m}) = (-1)^m d_1 \omega_f^{(m-1)}(e_2, \dots, \widehat{e_{m+1}}, \dots, e_{2m}) ,$$

et par une récurrence immédiate, $P(A) = (-1)^m d_1 (-1)^{m-1} d_2 \dots (-1)^1 d_m = (-1)^{m(m+1)/2} \text{Det } D$.

11.

- a) Clair : ${}^t(MAM) = {}^tM^tAM = -{}^tMAM$.
- b) Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^{2m}$ associés aux matrices respectives A et tMAM , i.e. $f : X \mapsto AX$ et $g : X \mapsto {}^tMAMX$. On a que $\omega_g(x, y) = (x \mid {}^tMAMy) = \omega_f(Mx, My)$, puis, par une récurrence évidente en utilisant la définition :

$$\forall k \in [1, m] \quad \omega_g^{(k)}(x_1, \dots, x_{2k}) = \omega_f^{(k)}(Mx_1, \dots, Mx_k) \quad .$$

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \omega_g^{(m)}(x_1, \dots, x_{2m}) &= \omega_f^{(m)}(Mx_1, \dots, Mx_{2m}) \\ &= P(A) \operatorname{Det}(Mx_1, \dots, Mx_{2m}) \\ &= P(A) \operatorname{Det} M \operatorname{Det}(x_1, \dots, x_{2m}) \quad , \end{aligned}$$

d'où, par définition du Pfaffien, $P({}^tMAM) = P(A) \operatorname{Det} M$.

12. Par 6.a), on a $A = {}^tQ \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix} Q$, d'où par 10.c) et 11.b) : $P(A) = \operatorname{Det} Q \cdot (-1)^{m(m+1)/2} \operatorname{Det} D$, ce qui, vu

$$\operatorname{Det} Q = \pm 1 \text{ (} Q \text{ est orthogonale), et } \operatorname{Det} A = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix} = (\operatorname{Det} D)^2 \text{ , implique bien } (P(A))^2 = \operatorname{Det} A \text{ .}$$

13. On utilise 6.b) : $A = {}^tMJ_{2m}M$. Par définition, $\prod(A) = \operatorname{Det} M \prod(J_{2m})$, tandis que $P(A) = \operatorname{Det} M \cdot P(J_{2m}) = (-1)^{m(m+1)/2} \operatorname{Det} M$. On en déduit que $\prod(A) = (-1)^{m(m+1)/2} \prod(J_{2m}) \cdot P(A)$.

14. Par 11.b), on a $P(J_{2m}) = P({}^tMJ_{2m}M) = \operatorname{Det} M \cdot P(J_{2m})$, et comme $P(J_{2m}) = \pm 1 \neq 0$, il en découle bien $\operatorname{Det} M = 1$.

15.

- a) On écrit : $A = \begin{pmatrix} 0_m & -{}^tB \\ B & 0_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tB & 0_m \\ 0_m & I_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B & 0_m \\ 0_m & I_m \end{pmatrix}$, d'où par propriétés du Pfaffien et du déterminant :

$$P(A) = \operatorname{Det}(B) \cdot P(J_{2m}) = (-1)^{m(m+1)/2} (\operatorname{Det} B) \quad .$$

- b) On commence par le cas $A_1 = J_{2m_1}$, $A_2 = J_{2m_2}$. La matrice obtenue se ramène (est semblable) à la matrice $J_{2(m_1+m_2)}$ lorsqu'on intervertit, dans la base canonique $(e_1, \dots, e_{2m_1+2m_2})$, les vecteurs $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_1+m_1}$ avec les vecteurs $e_{2m_1+1}, \dots, e_{2m_1+m_2}$. Cela correspond à un changement de base *orthonormée* de déterminant $(-1)^{m_1m_2}$ (on réalise en effet $m_1 \cdot m_2$ transpositions de vecteurs consécutifs). D'après la formule du 11.b), on a alors :

$$\begin{aligned} P \left(\begin{pmatrix} J_{2m_1} & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_1, 2m_2} & J_{2m_2} \end{pmatrix} \right) &= (-1)^{m_1m_2} P(J_{2(m_1+m_2)}) \\ &= (-1)^{m_1m_2} (-1)^{(m_1+m_2)(m_1+m_2+1)/2} = (-1)^{m_1(m_1+1)/2} \cdot (-1)^{m_2(m_2+1)/2} \quad . \end{aligned}$$

Dans le cas général, on écrit $A_1 = {}^tM_1J_{2m_1}M_1$ et $A_2 = {}^tM_2J_{2m_2}M_2$, d'où

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_1 & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_1, 2m_2} & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tM_1J_{2m_1}M_1 & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_1, 2m_2} & {}^tM_2J_{2m_2}M_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tM_1 & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_1, 2m_2} & {}^tM_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_{2m_1} & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_1, 2m_2} & J_{2m_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_1 & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_1, 2m_2} & M_2 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

et par propriété du Pfaffien :

$$\begin{aligned} P(A) &= \operatorname{Det} M_1 \operatorname{Det} M_2 \cdot P \left(\begin{pmatrix} J_{2m_1} & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_1, 2m_2} & J_{2m_2} \end{pmatrix} \right) \\ &= (-1)^{m_1(m_1+1)/2} \operatorname{Det} M_1 \cdot (-1)^{m_2(m_2+1)/2} \operatorname{Det} M_2 \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*
* *