

Corrigé 1ère épreuve Mines-Ponts 2003 PSI

Première partie

1. Le système **(S)** s'écrit $-y''(x) + \alpha y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.
Si $\alpha = 0$, y est affine, nulle en 0 et 1, donc identiquement nulle.
Si $\alpha > 0$, $y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt{\alpha} x + B \operatorname{sh} \sqrt{\alpha} x$, avec les conditions $A = 0$ et $B \operatorname{sh} \sqrt{\alpha} = 0$, donc $B = 0$ et y est identiquement nulle.
Si $\alpha < 0$, on pose $\omega = \sqrt{-\alpha}$, ce qui donne $y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$, avec les conditions $A = 0$ et $B \sin \omega = 0$. Si $\alpha = -\pi^2 n^2$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $y(x) = B \sin n\pi x$. Sinon, y est identiquement nulle.
2. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi'(x) = -\int_0^x t\varphi(t) dt + \int_x^1 (1-t)\varphi(t) dt$.
on en déduit que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi''(x) = -x\varphi(x) - (1-x)\varphi(x) = -\varphi(x)$. Par ailleurs, $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.
3. On aura $\Phi'' - \Phi_1' = 0$ c'est-à-dire que $\Phi - \Phi_1$ est une fonction affine, qui s'annule en 0 et 1, donc est identiquement nulle.
4. La fonction $x \mapsto y(x) = (x-1) \int_0^x t f(t) dt + x \int_0^1 (1-t) f(t) dt$ est solution de **(S₀)** d'après 2, et la solution obtenue est unique d'après 3.
5. Si y est solution de **(S₁)**, alors elle vérifie **(S₀)** avec $f = hy$. D'après la question 4 et la formule du 2, on en déduit que y vérifie la relation **(R)**. Inversement, si y vérifie **(R)**, alors en utilisant la question 2, y vérifie le système **(S₁)**.
6. Les fonctions h et y sont continues sur le compact $[0, 1]$, donc leurs valeurs absolues admettent des maximums notés H et Y .
7. On utilise la relation **(R)** démontrée au 5 :

$$\forall x \in [0, 1], |y(x)| \leq (1-x) \int_0^x tHY dt + x \int_x^1 (1-t)HY dt = \frac{HY}{2}(x^2(1-x) + x(1-x)^2) = \frac{HY}{2}x(1-x) \leq \frac{HY}{8}.$$

8. En passant à la borne supérieure dans l'inégalité précédente, on trouve $Y \leq \frac{HY}{8}$. Si y n'est pas la fonction nulle, alors $Y > 0$, donc $H \geq 8$, condition nécessaire cherchée.

On prend h constante telle qu'il existe une solution non nulle. D'après 1, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = -\pi^2 n^2$. Par suite, $H = \pi^2 \geq 8$.

Seconde partie

9. La fonction $\tilde{G}_x$ est continue, affine par morceaux. Cette fonction étant impaire, on a $c_0(\tilde{G}_x) = a_n(\tilde{G}_x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} b_n(\tilde{G}_x) &= 2 \int_0^1 \tilde{G}_x(t) \sin(n\pi t) dt = 2(1-x) \int_0^x t \sin(n\pi t) dt + 2x \int_x^1 (1-t) \sin(n\pi t) dt \\ &= 2(1-x) \left(\left[-t \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^x + \frac{1}{n\pi} \int_0^x \cos(n\pi t) dt \right) + 2x \left(\left[-(1-t) \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_x^1 - \frac{1}{n\pi} \int_x^1 \cos(n\pi t) dt \right) \\ &= 2(1-x) \left(-x \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{n^2 \pi^2} \right) + 2x \left((1-x) \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi x)}{n^2 \pi^2} \right) = \frac{2 \sin(n\pi x)}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

10. La fonction $\tilde{G}_x$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc sa série de Fourier converge normalement vers elle. Ce résultat du cours se vérifie directement ici car $|b_n(\tilde{G}_x)| \leq \frac{2}{n^2\pi^2}$.

11. D'après la question précédente, on a : $\forall (x, t) \in [0, 1]^2$, $G(x, t) = \tilde{G}_x(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} \sin(n\pi t)$.

La valeur absolue du terme général est majorée par $\frac{2}{n^2\pi^2}$, donc la série de fonctions de deux variables converge normalement, et a fortiori uniformément, sur le carré $[0, 1]^2$.

12. Si z est solution de $(\mathbf{T})$, alors z vérifie le système $(\mathbf{S}_0)$ (cf question 4) qui admet une solution unique donnée par

$$z(x) = (1-x) \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 (1-t) f(t) dt = \int_0^1 G(x, t) f(t) dt.$$

On observe en outre avec l'expression sommatoire de $G(x, t)$ trouvée question 11 que la fonction obtenue est impaire et 2-périodique.

13. Comme $\left| 2f(t) \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2} \sin(n\pi t) \right| \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{n^2\pi^2}$, la série de fonctions de la variable t converge normalement sur $[0, 1]$, donc on peut intervertir la somme infinie et l'intégrale, ce qui donne

$$z(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \sin(n\pi t) f(t) dt \frac{\sin(n\pi x)}{\pi^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \frac{\sin(n\pi x)}{\pi^2 n^2}.$$

Comme la suite $(b_n(f))$ converge vers 0, cette série converge normalement par rapport à la variable x , donc on peut calculer les coefficients de Fourier de z en intégrant terme à terme, ce qui donne $b_n(z) = \frac{b_n(f)}{\pi^2 n^2}$.

On sait par ailleurs (en intégrant 2 fois par parties) que $b_n(z'') = -\pi^2 n^2 b_n(z)$, d'où $b_n(-z'' - f) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Comme la fonction $z'' + f$ est impaire, tous ses coefficients de Fourier sont nuls. Etant continue, elle est nulle en vertu du théorème de Parseval. La fonction z est donc l'unique solution du système $(\mathbf{T})$.

14. On a $f = 2\tilde{G}_{\frac{1}{2}}$, d'où $b_n(f) = 4 \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}$ et $f(t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\pi^2 n^2} \sin(n\pi t) = 4 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\pi^2 (2p+1)^2} \sin((2p+1)\pi t)$.

$$\text{D'après 13, } u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin \frac{n\pi}{2}}{\pi^2 n^2} \frac{\sin(n\pi x)}{\pi^2 n^2} = \frac{4}{\pi^4} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\sin((2p+1)\pi x)}{(2p+1)^4}.$$

Les séries des dérivées premières et secondes convergent normalement (termes généraux respectifs en $\frac{1}{p^3}$ et $\frac{1}{p^2}$) donc le développement obtenu est bien celui d'une fonction deux fois continuellement dérivable.

15. Par linéarité des coefficients de Fourier, $b_n(-z'') = b_n(f) - ab_n(z)$. Or $b_n(z'') = -\pi^2 n^2 b_n(z)$, donc $b_n(z)(a + \pi^2 n^2) = b_n(f)$ pour tout $n \geq 1$.

16. • Si $\forall n \geq 1$, $a + \pi^2 n^2 \neq 0$ (c'est-à-dire $a \notin -\pi^2 \mathbb{N}^{*2}$), $b_n(z)$ est déterminé de façon unique.

• Sinon, il existe un entier n_0 – forcément unique – tel que $a + \pi^2 n_0^2 = 0$.

Si $b_{n_0}(f) \neq 0$, le problème n'a pas de solution.

Si $b_{n_0}(f) = 0$, $b_n(z)$ est déterminé de façon unique pour $n \neq n_0$, tandis que $b_{n_0}(z)$ peut prendre toute valeur.

17. On se place dans le cas où $a \notin -\pi^2 \mathbb{N}^{*2}$. On pose $z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{a + \pi^2 n^2} \sin(n\pi x)$. Soit $f_n(x) =$

$\frac{b_n(f)}{a + \pi^2 n^2} \sin(n\pi x)$. Comme la suite $(b_n(f))$ converge vers 0, la série $\sum f_n$ converge normalement, ce qui démontre que z est continue sur $\mathbb{R}$, et clairement 2-périodique, impaire et nulle en 0 et 1.

De plus, $\|f'_n\|_{\infty} = \frac{\pi n}{a + \pi^2 n^2} |b_n(f)|$ et $\|f''_n\|_{\infty} = \frac{\pi^2 n^2}{a + \pi^2 n^2} |b_n(f)|$. Comme la série $\sum |b_n(f)|$ converge (f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux), on en déduit que les séries $\sum f'_n$ et $\sum f''_n$ convergent normalement. Par conséquent, z est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\forall n \geq 1$, $b_n(z'') = -\pi^2 n^2 b_n(z)$, donc $b_n(-z'' - f + az) = 0$. En utilisant Parseval, il en découle que $-z'' - f + az = 0$, donc z est solution de $(\mathbf{T}_a)$, unique d'après la question 16.

18. On a $b_n(f) = 4 \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\pi^2 n^2}$, donc $z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\pi^2 n^2 (a + \pi^2 n^2)} \sin(n\pi x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \sin((2p+1)\pi x)}{(2p+1)^2 (a + \pi^2 (2p+1)^2)}$.