

Un corrigé MP Maths 2 Mines 2009

1) Soit $u : C^\infty([0, 1]) \rightarrow C^\infty([0, 1])$, avec $u(f)(x) = xf'(x)$ on a $(\phi_{\lambda_{[0,1]}})_{\lambda \geq 0}$ est une famille de vecteurs propres de u associée à des valeurs propres deux à deux distinctes donc elle est libre par suite $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ l'est aussi.

$$2) A_n D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{A_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \quad \text{l'opération } C_n \leftarrow C_n + \sum_{1 \leq k \leq n-1} A_k C_k \text{ donne}$$

$$A_n D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & R(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix} = D_{n-1} R(a_n).$$

3) Si les a_k ou les b_k ne sont pas distincts le déterminant aura deux lignes ou deux colonnes égales donc sera nul, le résultat demandé est vrai.

Si les $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont deux à deux distincts ainsi que les $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ on a $R(X)$ est de la forme

$$R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X+b_k} \text{ et } A_n = \lim_{x \rightarrow -b_n} (x+b_n)R(x) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (-b_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (-b_n + b_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)}.$$

$$R(a_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n + b_k)} \text{ donc } D_n = \frac{R(a_n)}{A_n} D_{n-1} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)(b_n - b_k)}{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k) \prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_n)} D_{n-1}.$$

$$\text{On a } D_1 = \frac{1}{a_1+b_1} \text{ donc } D_2 = \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{(a_2 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + b_2)} D_1 = \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} (a_i + b_j)}.$$

Supposons le résultat pour $n-1$ alors :

$$D_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)(b_n - b_k)}{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k) \prod_{k=1}^{n-1} (a_k + b_n)} \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} (a_i + b_j)} = \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$$

4) Par caractérisation de la borne inférieure on a $d(x, A) = 0$ ssi

$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, d(x, y) < \varepsilon$ càd $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ce qui est équivalent à $x \in \bar{A}$.

5) On a $A_n \subset A_{n+1}$ donc $d(x, A_n) \geq d(x, A_{n+1})$ la suite $d(x, A_n)$ est donc décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, A_n) = \inf_{n \geq 0} d(x, A_n)$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A$ donc $d(x, A_n) \geq d(x, A)$ par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, A_n) \geq d(x, A)$.

Soit $y \in A$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_{n_0}$ donc $d(x, y) \geq d(x, A_{n_0}) \geq \inf_{n \geq 0} d(x, A_n)$ ainsi

$\forall y \in A, d(x, y) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, A_n)$ en passant à l'inf sur y on obtient $d(x, A) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, A_n)$

Finalement $d(x, A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, A_n)$.

6) Soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $B \cap V$ donc c'est une suite bornée d'éléments de V qui est de dimension finie donc par Bolzano-Weierstrass $(y_n)_{n \geq 0}$ admet une valeur d'adhérence $y \in V$ or B est fermée donc $y \in B \cap V$ finalement $B \cap V$ est compact.

On a $B \cap V \subset V$ donc $d(x, B \cap V) \geq d(x, V)$. Soit $y \in V$, si $y \in B$ alors $d(x, y) \geq d(x, B \cap V)$ si $y \notin B$ alors $d(x, y) > d(x, 0) \geq d(x, B \cap V)$ car $0 \in B \cap V$.

Ainsi $\forall y \in V, d(x, y) \geq d(x, B \cap V)$ donc $d(x, V) \geq d(x, B \cap V)$ enfin $d(x, V) = d(x, B \cap V)$.

7) L'application $y \rightarrow \|x - y\|$ est continue sur le compact $B \cap V$ donc elle atteint sa borne inférieure d'où l'existence de $y \in V$ tel que $d(x, B \cap V) = \|x - y\|$ càd $d(x, V) = \|x - y\|$.

8) Notez que la projection orthogonale sur V existe car V de dimension finie.

Soit y la projection orthogonale de x sur V et $z \in V$ on a :

$x - z = (x - y) + (y - z)$, $x - y \in V^\perp$ et $y - z \in V$ donc par Pythagore on a

$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$ on a donc :

$\forall z \in V, d(x, z) \geq \|x - y\|$ avec égalité ssi $z = y$, par suite y est l'unique élément de V

vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

9) Soit $V = \text{vect}(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $u : V \rightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto ((x_1|x), \dots, (x_n|x))$.

On a u est linéaire, montrons qu'elle est injective:

si $u(x) = 0$ alors $\forall i \in [1, n], (x_i|x) = 0$ donc $x \in V^\perp$ or $x \in V$ donc $x = 0$.

Comme u est injective alors:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow (u(x_1), \dots, u(x_n)) \text{ liée} \\ &\Leftrightarrow \det_e(u(x_1), \dots, u(x_n)) = 0 \quad (e \text{ la base canonique de } \mathbb{K}^n) \\ &\Leftrightarrow G(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

10) Soit y la projection orthogonale de x sur V donc $x - y \in V^\perp$ par suite $\forall i \in [1, n],$

$(x_i|x - y) = 0$ donc $(x_i|x) = (x_i|y)$ et $(x|x) = \|x - y + y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2$ donc

$$G(x_1, \dots, x_n, x) = \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & (x_1|y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & (x_n|y) \\ (y|x_1) & \dots & (y|x_n) & \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \quad \text{par linéarité par rapport à la}$$

dernière colonne on obtient :

$$G(x_1, \dots, x_n, x) = G(x_1, \dots, x_n, y) + \begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & 0 \\ (y|x_1) & \dots & (y|x_n) & \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \quad \text{et comme } (x_1, \dots, x_n, y) \text{ est}$$

liée alors $G(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ donc $G(x_1, \dots, x_n, x) = \|x - y\|^2 G(x_1, \dots, x_n)$, or $(x_1, \dots, x_n)$ est libre

donc $G(x_1, \dots, x_n)$ est non nul d'où $\frac{G(x_1, \dots, x_n, x)}{G(x_1, \dots, x_n)} = \|x - y\|^2 = d(x, V)^2$.

$$11) N_2(f)^2 = \int_0^1 f^2(t) dt \leq \int_0^1 N_\infty(f)^2 dt = N_\infty(f)^2 \text{ d'où } N_2(f) \leq N_\infty(f).$$

Soit $f \in \bar{A}^\infty$ donc il existe une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A tel que $N_\infty(f_n - f)$ tend vers 0

et comme $N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$ alors $N_2(f_n - f)$ tend aussi vers 0 donc $f \in \bar{A}^2$.

12) Soit $(g_n)_{n \geq 0}$ la suite d'éléments de V_0 défini par $g_n(t) = 1 - (1 - t)^n$ on a

$$\|\phi_0 - g_n\|_2^2 = \int_0^1 (1 - t)^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \text{ tend vers 0 donc } \phi_0 \in \bar{V}_0^2.$$

13) Notons $E = C([0, 1])$. Soit $f \in E$ et $g = f - f(0)\phi_0$ on a $g \in V_0$ et $f = g + f(0)\phi_0$

or $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$ donc il existe une suite $(g_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de V_0 qui tend vers ϕ_0 donc

$g + f(0)g_n$ est une suite d'éléments de V_0 qui tend vers f d'où $\overline{V_0}^2 = E$.

On a $B(\phi_0, \frac{1}{2}) \cap V_0 = \emptyset$ donc $\phi_0 \notin \overline{V_0}^\infty$ donc $\overline{V_0}^\infty \neq E$.

14) On a $0 \in V \subset \bar{V}$, soient x, y deux éléments de $\bar{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ donc il existe $(x_n)_{n \geq 0}$ et

$(y_n)_{n \geq 0}$ suites d'éléments de V telles que $(x_n)_{n \geq 0}$ tend vers x et $(y_n)_{n \geq 0}$ tend vers y

comme V est un espace vectoriel alors $\lambda x_n + y_n \in V$ or la suite $\lambda x_n + y_n$ tend vers $\lambda x + y$

donc $\lambda x + y \in \bar{V}$, ainsi $\bar{V}$ est également un espace vectoriel.

15) et 16) Soit $E = C([0, 1])$ et $\mathcal{P} = \text{vect}(\phi_m)_{m \geq 0}$, d'après Stone-Weierstrass $E = \bar{\mathcal{P}}^\infty$ donc

d'après 11) on a aussi $E = \bar{\mathcal{P}}^2$. Soit $q \in \{2, \infty\}$.

$\Rightarrow$ si V est dense dans E pour N_q alors $\forall m \in \mathbb{N}, \phi_m \in E = \bar{V}^q$.

$\Leftarrow$ Comme $\bar{V}^q$ est un espace vectoriel contenant les ϕ_m alors $\mathcal{P} \subset \bar{V}^q$ donc

$\bar{\mathcal{P}}^q \subset \bar{V}^q$ càd $E \subset \bar{V}^q$ ainsi $\bar{V}^q = E$.

17) On a $(W_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de $C([0, 1])$ et $W = \bigcup_{n \geq 0} W_n$

donc d'après 5) on a $d(\phi_\mu, W) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n)$ donc d'après 4) on a $\phi_\mu \in \bar{W}^2$ ssi

$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ d'où par 16) on a : W est dense pour N_2 ssi $\forall \mu \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.

18) On munit $C([0, 1])$ du produit scalaire : $(fg) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. D'après 1) on a $(\phi_k)_{0 \leq k \leq n}$

est une base de W_n donc d'après 10) on a $d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \phi_\mu)}{G(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)}$.

On a $\phi_i | \phi_j = \frac{1}{1 + \lambda_i + \lambda_j}$, pour $0 \leq i \leq n$ posons $a_i = b_i = \frac{1}{2} + \lambda_i$ et $a_{n+1} = b_{n+1} = \frac{1}{2} + \mu$

donc d'après 3) on a :

$$G(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \phi_\mu) = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)^2}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq n+1 \\ 0 \leq j \leq n+1}} (a_i + a_j)} \text{ et } G(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n) = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)^2}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} (a_i + a_j)} \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned}
d(\phi_\mu, W_n)^2 &= \frac{\prod_{i=0}^n (a_{n+1} - a_i)^2}{\prod_{j=0}^{n+1} (a_{n+1} + a_j) \prod_{i=0}^n (a_i + a_{n+1})} = \frac{\prod_{i=0}^n (\mu - \lambda_i)^2}{2a_{n+1} \left[\prod_{i=0}^n (a_i + a_{n+1}) \right]^2} \\
&= \frac{1}{1+2\mu} \left[\frac{\prod_{0 \leq i \leq n} (\mu - \lambda_i)}{\prod_{i=0}^n (1 + \lambda_i + \mu)} \right]^2 \text{ finalement } d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{i=0}^n \frac{|\lambda_i - \mu|}{\lambda_i + \mu + 1}.
\end{aligned}$$

19) On a $\frac{\lambda_k - \mu}{1 + \lambda_k + \mu} \leq \frac{|\lambda_k - \mu|}{1 + \lambda_k + \mu} \leq \frac{\lambda_k + \mu}{1 + \lambda_k + \mu}$ donc $\frac{1}{1 + \lambda_k + \mu} \leq 1 - \frac{|\lambda_k - \mu|}{1 + \lambda_k + \mu} \leq \frac{1 + 2\mu}{1 + \lambda_k + \mu}$

il en résulte que la suite $\frac{|\lambda_k - \mu|}{1 + \lambda_k + \mu}$ tend vers 1 ssi λ_k tend vers $+\infty$.

20) D'après 17) et 18) on a W est dense dans $C([0, 1])$ pour N_2 ssi pour tout $\mu \in \mathbb{N}$,

la suite $p_n(\mu) := \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Si $\mu \in \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ alors $p_n(\mu)$ est stationnaire en zéro donc tend vers 0, donc

$\overline{W}^2 = C([0, 1]) \Leftrightarrow \forall \mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$, la suite $p_n(\mu)$ tend vers 0.

Soit $\mu \in \mathbb{N} \setminus \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$, posons $u_n = \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} \in]0, 1]$. On a $\prod_{k=0}^n u_k$ tend vers 0 équivalent à

la suite $\sum_{k=0}^n \ln(u_k)$ tend vers $-\infty$ càd la série $\sum_{k \geq 0} \ln(u_k)$ diverge (car $\ln u_k \leq 0$).

• Si u_n ne tend pas vers 1 alors les séries $\sum_{n \geq 0} 1 - u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \ln u_n$ divergent grossièrement.

• Si u_n tend vers 1 alors $-\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 - u_n \geq 0$ donc les séries $\sum_{n \geq 0} 1 - u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \ln u_n$ sont

de même nature on conclut donc que $\prod_{k=0}^n u_k$ tend vers 0 ssi $\sum_{n \geq 0} 1 - u_n$ diverge.

D'autre part on a $\frac{1}{1 + \lambda_n + \mu} \leq 1 - u_n \leq \frac{1 + 2\mu}{1 + \lambda_n + \mu}$ donc $\sum_{n \geq 0} 1 - u_n$ diverge ssi $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + \lambda_n + \mu}$ diverge

Les λ_n sont deux à deux distincts, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \lambda_n \neq 0$.

Si λ_n tend vers $+\infty$ alors $\frac{1}{1 + \lambda_n + \mu} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda_n}$ donc les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{1 + \lambda_n + \mu}$ et $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{\lambda_n}$ sont de

même nature. Si λ_n ne tend pas vers $+\infty$ les deux séries divergent donc sont encore de

même nature, finalement $\overline{W}^2 = C([0, 1])$ ssi $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

Notez que si $\mathbb{N} \setminus \{(\lambda_k)_{k \geq 0}\} = \emptyset$, alors $\{\frac{1}{k}, k \geq 1\} \subset \{\frac{1}{\lambda_k}, \lambda_k \text{ non nul}\}$ donc $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

21) Résulte de 11) et 20).

22) il suffit de montrer que $\forall f \in C^1([0, 1]) \cap V_0, N_\infty(f) \leq N_2(f')$.

$$\text{Soit } x \in [0, 1], |f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt$$

$$\text{donc d'après Cauchy schwarz } N_\infty(f) \leq \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = N_2(f').$$

Remarque: Notez qu'avec les mêmes calculs si on suppose seulement $\lambda_k \geq 1$ pour tout

$$k \in \{1, \dots, n\} \text{ on aura pour } \mu \geq 1, N_\infty(\phi_\mu - \sum_{k=1}^n a_k \phi_{\lambda_k}) \leq N_2(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1}).$$

23) Comme les λ_k sont deux à deux distincts alors il existe $k_1 \geq 1$ tel que

$$\forall k \geq k_1, \lambda_k \neq 1, \text{ donc } \forall k \geq k_1, 0 < \lambda_k - 1 \leq \lambda_k \text{ d'où } \frac{1}{\lambda_k - 1} \geq \frac{1}{\lambda_k} > 0 \text{ or } \sum_{k \geq k_1} \frac{1}{\lambda_k} \text{ est}$$

divergente donc $\sum_{k \geq k_1} \frac{1}{\lambda_k - 1}$ l'est aussi d'où d'après 20) on a $\overline{\text{vect}(\phi_{\lambda_k - 1})}_{k \geq 1}^2 = C([0, 1])$, donc

$$\text{pour } \mu \geq 1 \text{ et } \varepsilon > 0 \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et des réels } (b_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ tel que } N_2(\mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=1}^n b_k \phi_{\lambda_k-1}) < \varepsilon$$

$$\text{donc d'après la remarque faite en 22) on a } N_\infty(\phi_\mu - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\lambda_k} \phi_{\lambda_k}) < \varepsilon, \text{ ainsi } \phi_\mu \in \overline{W}^\infty$$

de plus $\phi_0 = \phi_{\lambda_0} \in W \subset \overline{W}^\infty$ d'où $\forall \mu \in \mathbb{N}, \phi_\mu \in \overline{W}^\infty$ et on conclut par 15).

24) On a $\inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0$ donc il existe $r \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall k \geq 1, \lambda_k \geq \frac{1}{r}$ donc $\forall k \geq 1, r\lambda_k \geq 1$

et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{r\lambda_k}$ diverge donc d'après 23) on a $\overline{\text{vect}(\phi_{r\lambda_k})}_{k \geq 0}^\infty = C([0, 1])$ et en remarquant que

$$\forall f \in C([0, 1]), N_\infty(f) = N_\infty(f \circ \phi_r) \text{ on déduit que } N_\infty(\phi_\mu - \sum_{k=0}^n a_k \phi_{\lambda_k}) = N_\infty(\phi_{\mu r} - \sum_{k=0}^n a_k \phi_{r\lambda_k})$$

par suite la densité de $\text{vect}(\phi_{r\lambda_k})_{k \geq 0}$ entraîne celle de $\text{vect}(\phi_{\lambda_k})_{k \geq 0}$.

Fin

Lhachimi Lahcen, email: llahcen@gmail.com