# POLYTECHNIQUE PC Epreuve 1
# Résonance paramétrique

26 juin 2003

$\ddot{x} + (\lambda - q(t))x = 0$ ( avec q continue et T est une période ) (1)

## Première Partie

### 1

L' équation (1) est une équation différentielle linéaire du second ordre résolue sur R en $\ddot{x}$ sans second membre et à coefficients continus . Le théorème de Cauchy dans le cas linéaire dit que ses solutions sont définies sur R, de classe C2 , que l'ensemble $E$ des solutions est un C espace vectoriel que l'application :

$$V_0 \quad E \to C^2 \quad x \mapsto (x(0), \dot{x}(0))\text{est un isomorphisme .}$$

### 2

$x_1$ et $x_2$ étant des solutions de (1) , $W(x_1, x_2)$ est une fonction de classe C1 sur R , et , par dérivation de son expression sous forme de déterminant elle a une dérivée identiquement nulle sur R . R étant un intervalle elle est donc constante .

### 3 translation de $-\pi$

a) $\forall f \in E, \forall t \in R \quad \ddot{f}(t+\pi) + (\lambda - q(t+\pi))f(t+\pi) = 0$
Donc par périodicité de q , $\forall t \in R \quad T\ddot{(f)}(t) + (\lambda - q(t))T(f)(t) = 0$
Si f est dans $E$ alors T(f) est dans $E$ .
b)$\forall f \in Ker(\tau) \quad \tau(f) = 0 \quad \Rightarrow \forall t \in R \quad f(t+\pi] = 0 \Rightarrow f = 0.$
$\tau$ est donc un endomorphisme injectif de $E$ qui est un espace vectoriel de dimension 2 d'après 1 ; $\tau$ est donc un automorphisme de $E$ . (Inverse la transltion de $\pi$)

### 4

a)et b) La réponse est fournie immédiatement par l'isomorphisme $V_0$ introduit à la question 1 , sachant que (1,0) , (0,1) est la base canonique de $C^2$ .

## 5

a) $\tau(x_1) = y_1 \in E$ avec $y_1(0) = x_1(T) \quad \dot{y_1}(0) = \dot{x_1}(T)$. En utilisant l'isomorphisme $V_0$ et la base canonique de $C^2$ on obtient les décomposiion immédiate :

$$y_1 = x_1(T)x_1 + \dot{x_1}(T)x_2, \qquad y_2 = x_2(T)x_1 + \dot{x_2}(T)x_2$$

d'ou la matrice M .
b) On en déduit $Det(M) = W(x_1, x_2)(T) = W(x_1, x_2)(0) = 1$ et que $\Delta = \frac{Tr(M)}{2} = \frac{x_1(T)+\dot{x_2}(T)}{2}$

## 6

Les valeurs propres de $\tau$ sont les racines de son polyôme caractéristique donc de celui de M soit :

$$P(\rho) = \rho^2 - 2\Delta\rho + 1$$

## 7 Cas $\Delta$ réel et $|\Delta| \neq 1$

a) Le corps de base étant C , P est alors scindé à racines simples . $\tau$ est donc diagonalisable et $E$ est somme directe des deux sous espaces propres de $\tau$ qui sont de dimension 1 .
b)Cas $|\Delta| < 1$ . Les racines de P, valeurs propres de $\tau$ sont alors deux complexes non réels conjugués et de module 1 .Soit alors deux couples propres $(z_1, \rho_1), (z_2, \rho_2)$. $(z_1, z_2)$ est une base de $E$ et tout élément de $E$ s'écrit $y = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2$, $\mu_i \in C$,.
$\forall t \in [0, T], \quad \forall n \in N \quad z_i(t + nT) = \tau^n(z_i)(t) = \rho_i^n z_i(t)$ donc $|z_i(t + nT)| = |z_i(t)|$. Comme $|z_i|$ est continue sur le segment $[0, T]$ , $\exists t_0 \in [0, T] \quad |z_i(t_0)| = sup_[0, T]|z_i| = sup_R|z_i|$. $z_i$élément propre est non nul donc $|z_i(t_0)| = sup_R|z_i| \neq 0$ .
$z_1$ et $z_2$ sont donc deux fonctions bornées sur R et tous les éléments de $E$ sont bornés sur R ,c'est à dire que toutes les solutions sont stables .
Avec $z_1$, le calcul précédent donne $\forall n \in N, \quad |z_1(t_0 + nT)| = |z_1(t_0)| \neq 0$. En faisant tendre n vers l'infini , la quantité est constante , et il apparaît qu'une fonction propre ne peut être fortement stable .
c)Cas $|\Delta| > 1$ . $\tau$ admet alors deux valeurs propres réelles distinctes de produit 1 n notées $r$ et $\frac{1}{r}$ avec $|r| < 1$.
Soit un vecteur propre , élément de $E_r(\tau)$,$z_1$ .Le même calcul et les mêmes arguments qu'en a) conduisent à :

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall \in inN|z_1(t + nT)| = |r|^n|z_1(t)| \leq |r|^n|z_1(t_0)| = |r|^n||z_1||_{\infty,[0,T]} = v_n$$

où $(v_n)$est une suite réelle positive de limite nulle . On en déduit que :$\exists \lim_n \to +\infty|z_1(t)| = 0$.
Conclusion toute solution de (1) du sous espace propre de dimension 1 de $\tau$ associé à la valeur propre de module strictement inférieure à 1 est fortement stable et donc stable . Il n'y a donc pas unicité .
Les mêmes calculs avec $z_2$ vecteur propre associé à la valeur propre $\frac{1}{r}$ conduisent à , en prenant le point partculier $t_2$ tel que $||z_2||_{\infty,[0,T]} = |z_2(t_2)| \neq 0$

$$\forall n \in N|z_2(t_2 + nT)| = |r|^{-n}||z_2||_{\infty,[0,T]} = |z_2(t_2)||r|^{-n}$$

$(z_1, z_2)$ est alors une base de $E$ ensemble des solutions de (1) .Une solution y est donc une combinaison linéaire de $z_1$ et $z_2$, et le calcul des ses valeurs sur les termes de la suite $(t_2+nT)$ prouve qu' elle est stable si et seulement si elle est proportionnelle à $z_1$ et elle est alors fortement stable .
Conclusion : une solution stable est fortement stable et elle l'est si et seulement si elle est dans $E_r(\tau)$ avec $|r| < 1$ .

# 8 Cas $\Delta = \epsilon, \quad \epsilon \in \{-1, 1\}$

a)$\tau$ admet alors $\epsilon$ comme valeur propre double .Avec $z_1$vecteur propre associé, le théorème de la base incomplète et la trace de $\tau = 2\epsilon$ , on obtient une base de $E$ , $(z_1, z_2)$ dans laquelle la matrice de $\tau$ s'écrit $L = \epsilon * I_2 + a * J$ où a est complexe , J est une matrice dont le seule terme non nul est $J_{1,2} = 1$ et donc $J^n = 0$ avec n naturel supérieur ou égal à 2 .
b)On suppose a non nul . Les remarques précédentes prouvent (avec la formule du binôme puisque I et J commutent ), que la matrice de $\tau^n$ est $L = \epsilon^n * I_2 + n * a^{n-1} * J$.
Les solutions s'écrivent comme combinaison linéaire des éléments de la base $(z_1, z_2)$ , $y = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ .
En notant $t_i$ un point de $[0, T]$ ,où $|z_i(t_i)| = |z_i||_{\infty,[0,T]}$ qui existe par continuité des fonctions $z_i$ sur le segment $[0, T]$

$$\forall n \in N y(t_1 + nT) = \tau^n(y)(t_1) = (\alpha_1 * \epsilon_1^n + \alpha_2 * n * a * \epsilon^{n-1}) z_1(t_1) + \alpha_2 * \epsilon^n * z_2(t_1)$$

Pour que y soit , avec $|\epsilon|^n = 1$, il apparaît nécessaire et suffisant que $\alpha_2 = 0$. Le sous espace propre de dimension 1 de $\tau$ associé à la valeur propre $\epsilon$ est l'ensemble des solutions stables .
Les calculs précédents prouvent alors qu'une solution fortement stable (donc stable ) l'est si et seulement si elle est nulle (la norme infinie de $z_1$ sur le segment $[0, T]$ est non nulle (même raisonnement qu'en 7)).
La seule solution fortement stable est la solution nulle .

## Deuxième Partie

on suppose ici T=$\pi$ et $\lambda$ réel donc (1) $\ddot{x} + \lambda * x = 0$

# 9 Hypothèse q=0

## 9.1

Les résultats usuels sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants conduisent à :
$\lambda = 0$ alors $\Delta_0(0)) = 1, x_1(t) = 1, x_2(t) = t$
$|\lambda| = w^2 < 0$ alors $\Delta_0(w^2) = cos(w * \pi), x_1(t) = \frac{cos(\omega t)}{\omega}, x_2(t) = \frac{sin(\omega t)}{\omega}$
$|\lambda| = -w^2 > 0$ alors $\Delta_0(w^2) = ch(w * \pi), x_1(t) = \frac{ch(\omega t)}{\omega}, x_2(t) = \frac{sh(\omega t)}{\omega}$
La théorie des séries entières donne immédiatement que :

$$\forall \lambda \in R, \quad \Delta_0(\lambda) = \sum_0^{+\infty} (-1)^n * \frac{\lambda^n * \pi^{2n}}{(2n)!}$$

La fonction $\Delta_0$ est donc de classe $C^{+\infty}$ sur R .

## 9.2

à faire

## 9.3

Dans le cas très particulier q=0 et $\lambda = 0$ alors : $M = mat_{x_1,x_2}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans le cas q=0 et $\lambda = n^2, \quad n \in N^*$ les calculs précédents donnent : $M = mat_{x_1,x_2}(\tau) = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

## 10

Vu l'énoncé , on admet l'existence de la suite proposée (il faudrait faire une récurrence , avec invocation des propriétés des intégrales à paramètres) et la continuité en deux variables de la suite de fonctions proposées . Dans ce cas la suite devient banale .Tout cela fait beaucoup de sous entendus pour nos élèves )
L'existence de $Q$ ne pose pas de problème car $|q|$ est continue sur $R$ et admet $T$ pour période donc admet un maximum sur R comme dit dans l'énoncé .
La mise en oeuvre des deux récurrences , modulo tous ces résultats admis , ne pose pas de problème . (Pour les t positifs , on majore la valeur absolue de l'intégrale par l'intégrale de la valeur absolue , on majore la valeur absolue du sinus par 1 , et on applique l'hypothèse de récurrence . Adapter proprement les calculs aux cas t négatifs ).

## 11

En posant $\tilde{u}_n(t) = u_n(t, w)$, à w fixé, un raisonnement par récurrence prouve que les $\tilde{u}_n$ sont des fonctions continues d'une variable continues sur R . De même pour la famille des $\tilde{v}_n$ avec le même type de notation . Avec A quelconque réel positif sur les les segments $[-A, A]$

$$\forall t \in [-A, A]| \qquad |\tilde{u}_n(t)| \leq \frac{Q^n A^n}{w^n * n!} = \gamma_n(A)$$

avec $\gamma_n(A)$ terme général d'une série numérique convergente . D'ou la convergence normale sur $[-A, A]$ pour tout A. On en déduit la convergence normale sur tout segment inclus dans R( par inclusion d'un segment quelconque dans un segment $[-A, A]$). La suite de fonctions étudiée étant une suite de fonctions continues , la somme de la série est continue sur R .

## 12 on suppose ici $n \geq 1$

### 12.1

ayant admis les problèmes de continuité (énoncé ?) les formules fournies en 9c) permettent , apres application des formules de trigonométrie usuelles aux $sin(\omega(t-s))$ de se ramener à une somme de fonctions de classe $C^\infty$ multipliées par des intégrales fonction de la borne supérieure de fonctions d'une variable continue ( donc de classe $C^1$).
Un développement selon cette technique , suivi d'une dérivation élémentaire , puis d'une recomposition avec les formules de trigonométries élémentaires conduisent aux résulatat que les fonctions $\tilde{u}_n$ et $\tilde{v}_n$ (w est fixé) sont de classe $C^1$ avec :

$$\tilde{u}_n'(t) = \int_0^t cos(\omega)(t-s))q(s)\tilde{u}_{n-1}(s)ds$$

Le même processus conduit évidemment à la formule sur les $v_n$.

$$\tilde{v}_n'(t) = \int_0^t cos(\omega)(t-s))q(s)\tilde{v}_{n-1}(s)ds$$

### 12.2

En utilisant les majoration de (10) et les formules précédentes , avec t positif , on peut écrire :

$$|\dot{u}_n(t,w)| \leq \int_0^t Q * \frac{Q^{n-1}s^{n-1}}{w^{n-1}(n-1)!}ds \leq \frac{Q^n t^n}{w^{n-1}n!}$$

On travaille de façon analogue avec t négatif et pour $v_n$ .

### 12.3

Les fonctions $\tilde{u}_n$ sont de classe $C^1$ sur R. La série de fonctions $[\tilde{u}_n]$ converge simplement sur R et pour tout A réel positif ,

$$\forall t \in [-A,A] \qquad |\dot{\tilde{u}}_n(t)| \leq w\gamma_n(A)$$

avec $\gamma_n(A)$terme général d'une série numérique convergente .La série des dérivées $[\dot{\tilde{u}}_n]$ converge donc normalement sur tout segment $[-A,A]$ . Les hypothèses du théorème de dérivation sont satisfaites et $x_1(.,w)$ est une fonction de classe $C^1$ . De même pour $x_2(.,w)$

## 13

Avec les données de l'énoncé , une vérification à $\omega$ fixé d'une convergence normale par rapport à la variable s sur tout intervalle [0,t] de R (ou [t,0]), permet de justifier la convergence uniforme et donc d'affirmer que

$$x_1(t,w) = u_0(t,w) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,w) = u_0(t,w) + \int_0^t \frac{sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1}(s,w)ds$$

qui est le résultat demandé .

$x_(.,w)$ est continue ,donc on peut appliquer la formule de dérivation démontrée pour $u_n(.,w)$

$$\dot{x}_1(t,\omega) = -\omega sin(\omega t) + \int_0^t cos(\omega(t-s))q(s)x_1(s,\omega)ds$$

On peut alors développer le cosinus pour obtenir des intégrales sans paramètre fonction de la bornes supérieure . La dérivation conduit alors à :

$$\ddot{x}_1(t,\omega) = -\omega^2 cos(\omega t) + q(t)x_1(t,\omega) - \omega\int_0^t sin(\omega(t-s))q(s)x_1(s,\omega)ds$$

$$\ddot{x}_1(t,\omega) = -\omega^2 x_1(t,\omega) + q(t)x_1(t,\omega)$$

Cela permet de justifier que $x_1(.,w)$ est de classe $C^2$ et solution de 1 (de même pour $x_2(.,w)$) . Mais il ne me semble pas a priori que les solutons du problème soit $C^\infty$ car dans le calcul de $\ddot{x}_1$ le terme $t \mapsto q(t)x_1(t,\omega)$ génère un terme peu contrôlable sans des hypothèses de régularité sur $q$.

## 14

### 14.1

En faisant abstraction des confusions de notation avec la partie I question (4) , il est prouvé que $x_1$ et $x_2$ sont de classe au moins $C^2$ sur R et solution de (1) pour $\lambda = \omega^2$ avec $\omega$ un réel positif .

### 14.2

Dans ce cas $\lambda = \omega^2 > 0$ , les fonctions $x_1(.,\omega)$ et $x_2(.,\omega)$ introduites par les notations du problème en (13), vérifient les mêmes conditions initales que les fonctions$x_1$ et $x_2$ de la partie I question 4 .Ces fonctions coincident. Il est alors immédiat que l'on retrouve la relation du 5c

$$\Delta_q(\lambda) = \frac{1}{2}(x_1(\pi,\omega) + \dot{x}_2(\pi,\omega)), \qquad \lambda = \omega^2 > 0$$

## 15

Avec tous les résultats acquis et $\lambda = \omega^2$ :

$$\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = \Delta_q(\lambda) - cos(\omega\pi) = \frac{1}{2}\sum_1^{\infty}(u_n(\pi,\omega) + \dot{v}_n(\pi,\omega))$$

Les majorations de 12 b , prouve l'absolue convergence des deux séries qui interviennent , on peut donc majorer par la somme de la série majorante des valeurs absolues

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leq \sum_1^{\infty} \frac{Q^n\pi^n}{\omega^n n!} = exp(\frac{Q\pi}{\omega}) - 1 \qquad \omega = \sqrt{\lambda}$$

## 16 On suppose que $\int_0^\pi q = 0$

### 16.1

$$u_1(\pi,\omega) = \int_0^\pi \frac{sin(\omega(\pi - s))}{\omega} q(s)cos(\omega s)ds$$

$$\dot{v}_1(\pi,\omega) = \int_0^\pi cos(\omega(\pi - s))q(s)\frac{sin(\omega s)}{\omega}ds$$

D'où $u_1(\pi,\omega) + \dot{v}_1(\pi,\omega) = \frac{1}{\omega}(\int_0^\pi q(s)ds)sin(\omega\pi) = 0$

### 16.2

Comme on étudie pour $\lambda$ tendant vers l'infini, on note $\sqrt{\lambda} = \omega$.

$$2 * \Delta_q(\lambda) = u_0(\pi,\omega) + \dot{v}_0(\pi,\omega) + \sum_{n=2}^{+\infty}(u_n(\pi,\omega) + \dot{v}_n(\pi,\omega))$$

$$2 * \Delta_q(\lambda) = 2 * \Delta_0(\lambda) + \sum_{n=2}^{+\infty}(u_n(\pi,\omega) + \dot{v}_n(\pi,\omega))$$

Toujours par absolue convergence des séries , l'extension de l'inégalité triangulaire et les majorations de 10 et 12b donnent :

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{Q^n\pi^n}{\omega^n n!}$$

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leq \frac{(Q\pi)^2}{\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(Q\pi)^{n-2}}{\omega^{n-2}(n-2)!} = \frac{(Q\pi)^2}{\lambda} exp(\frac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}})$$

La fonction $\lambda \to exp(\frac{Q\pi}{\sqrt{\lambda}})$ est continue sur $R^+$ de limite nulle à l'infini donc bornée sur $R^+$ .
On peut donc conclure que quand $\lambda$ tend vers plus l'infini $\Delta_q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + O(\frac{1}{\lambda})$

# 17

Avec $\lambda > 0$ le 15 s'applique $|\Delta_q(\lambda)| \leq |cos(\sqrt{\lambda}\pi)| + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$.Donc si $\lambda$ est dans un intervalle d'instabilité alors $1 < |cos(\sqrt{\lambda}\pi)| + O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$
Pour tout $\alpha > 0$ on peut introduire $\beta = \frac{1}{2}Inf(\alpha, \frac{1}{2})$ .
Alors les intervalles des réels $\mu > 2\alpha$ tels que $|cos(\sqrt{\mu}\pi)| \geq 1 - cos(\beta\pi) = |cos(p\pi) - cos((p+\beta)\pi| = |cos(p\pi) - cos((p-\beta)\pi|$ , p désignant un entier naturel supérieure à $\alpha$ , vues les variations du cosinus , matérialisées par un dessin des arcs du cercle unité correspondant à la valeur de cette minoration ,prouvent que , puisqu'il sagit d'un intervalle , qu'il existe un entier naturel p tel que : $0 < (p-\alpha) < (p-\beta) < \sqrt{\mu} < (p+\beta)$ Soit encore $(p-\alpha)^2 < (p-\beta)^2 < \mu < (p+\beta)^2 < (p+\alpha)^2$ .
Comme il existe $\lambda_0 > \alpha + 2$ avec $\forall \lambda > \lambda_0, \quad |O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})| < 1 - cos(\beta\pi)$ pour tout $\alpha$ , il existe $\lambda_0$ tel que pour tout intervalle d'instabilité inclus dans $[\lambda_0, +\infty[$ il existe un entier naturel non nul p tel que pour tout $\lambda$ de l'intervalle d'instabilité :

$$(p-\alpha)^2 < (p-\beta)^2 < \lambda < (p+\beta)^2 < (p-\alpha)^2$$

Les intervalles d'instabilité étant inclus dans des intervalles centrés sur des carrés d'entiers et de largeur fixe , on peut en déduire lorsque $\lambda$ tend vers plus l'infini qu'ils sont de plus en plus éloignés les un des autres (s'il en existe ).