ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1984

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée 2 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : EPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

NOTA : Soit v une suite à termes réels, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$; son terme général $v(n)$ sera noté, par abréviation, v_n ; à cette suite v on associe la suite, notée $\overline{v}$, qui a pour terme général $\overline{v}_n = v_{n+1} - v_n$. Si la suite v est convergente et a pour limite ℓ, $\overline{v}$ converge vers zéro. On admettra, sans démonstration, concernant la suite convergente v et la suite associée $\overline{v}$, les faits suivants :

$$(R_1) \quad (\forall\, n,\ \overline{v}_n > 0) \text{ entraîne } (\forall\, n,\ v_n < \ell)$$

$$(R_2) \quad (\forall\, n,\ \overline{v}_n < 0) \text{ entraîne } (\forall\, n,\ \ell < v_n)$$

ainsi que :

(R_3) s'il existe un nombre A non nul et un entier naturel α strictement supérieur à 1, tels que l'on ait, pour n tendant vers l'infini, l'équivalence $\overline{v}_n \sim A \dfrac{1}{n^\alpha}$, alors on a aussi l'équivalence

$$v_n - \ell \sim \frac{-A}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha - 1}} .$$

On pourra utiliser, pour n convenable, le développement limité connu de $\operatorname{Log}(1 + x)$ au voisinage de zéro :

$$(R_4) \quad \operatorname{Log}(1 + x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n).$$

où $o(x^n)$ désigne un infiniment petit tel que $o(x^n)/x^n$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.

On pourra, si on le préfère, utiliser le fait suivant :

(R_5) soit ϕ une fonction numérique dérivable sur $[0, 1]$, nulle en 0 ; s'il existe un réel non nul B et un entier naturel β tels que, pour x tendant vers zéro, on ait l'équivalence $\phi'(x) \sim Bx^\beta$, alors on a aussi l'équivalence $\phi(x) \sim \dfrac{Bx^{\beta+1}}{\beta + 1}$.

1°) On désigne par S_n la somme des inverses des n premiers entiers : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

a) Soit u la suite définie par $u_n = S_n - \operatorname{Log} n$. Calculer à 10^{-3} près par défaut les termes u_1, u_2, u_3, u_4.

b) En étudiant, au besoin, la fonction ψ définie sur $[0, 1]$ par $\psi(x) = x - \operatorname{Log}(1 + x)$, démontrer, pour tout entier k, l'inégalité $\dfrac{1}{k} > \operatorname{Log} \dfrac{k + 1}{k}$; en déduire l'inégalité : $u_n > 0$.

c) On considère la suite $\overline{u}$ associée à la suite u, définie donc par $\overline{u}_n = u_{n+1} - u_n$; vérifier que l'on a $\overline{u}_n = \phi_o(\frac{1}{n})$, ϕ_o étant la fonction définie sur [0, 1] par $\phi_o(x) = \frac{x}{1+x} - \text{Log}(1+x)$; calculer $\phi_o'(x)$; en déduire le signe de $\phi_o(x)$ et que la suite u est convergente ; on désigne par γ sa limite ; montrer que, pour tout n, $\gamma < u_n$.

d) On appelle u' la suite définie par $u'_n = u_n - \frac{1}{2n}$; calculer à 10^{-3} près par défaut, les quatre nombres u'_1, u'_2, u'_3, u'_4.

Soit $\overline{u'}$ la suite associée à la suite u' : $\overline{u'}_n = u'_{n+1} - u'_n$; montrer que l'on a $\overline{u'}_n = \phi_1(\frac{1}{n})$, avec $\phi_1(x) = \phi_o(x) + \frac{x^2}{2(1+x)}$. Calculer $\phi_1'(x)$; étudier son signe et celui de $\phi_1(x)$. Montrer que l'on a, pour tout n, $u'_n < \gamma$.

2°) On se propose d'évaluer la constante γ avec plus de précision.

a) Démontrer que, pour n tendant vers l'infini, on a $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.

b) Chercher un équivalent, dans les mêmes conditions, de $u'_n - \gamma$.

c) On pose $u''_n = u'_n + \frac{1}{12\,n^2}$ et $\overline{u''}_n = u''_{n+1} - u''_n$. En introduisant la fonction ϕ_2 définie par $\phi_2(x) = \phi_1(x) - \frac{2x^3 + x^4}{12(1+x)^2}$, étudier le signe de $\overline{u''}_n$; en déduire la double inégalité $u'_n < \gamma < u''_n$.

d) Donner un équivalent simple de $u''_n - \gamma$.

3°) On pose, enfin $u'''_n = u''_n - \frac{1}{120\,n^4}$.

a) On admet la double inégalité $u'''_n < \gamma < u''_n$. Calculer les nombres u_{10}, u'_{10}, u''_{10}, u'''_{10} avec la précision du matériel dont on dispose <u>et que l'on indiquera</u>. En déduire une évaluation de γ.

b) Démontrer la double inégalité admise en a) ; on associera, pour cela, à la suite u''', la suite $\overline{u'''}$ et on introduira une fonction ϕ_3 convenable.

4°) Pour n appartenant à un intervalle $[n_1, n_2]$ convenable de $\mathbb{N}$, u_n vérifie la double inégalité $0{,}01 < u_n - \gamma < 0{,}02$. Trouver de tels entiers n_1 et n_2.