

(ENSAE 2000.)

Partie I

1°) En dimension finie (ici $\leq n$), la sphère S_n , qui est bornée et fermée, est compacte. Or elle est recouverte par les boules $B(z, \delta)$ quand z décrit S_n . On peut en extraire un sous-recouvrement fini, donc il existe z, \dots, z_M sur S_n tels que tout $z \in S_n$ soit dans l'une au moins des boules $B(z_j, \delta)$.

2°) On sait (cours) qu'une intersection d'hyperplans est de codimension finie : ici, en effet, si on considère l'application u

de E dans \mathbb{R}^M définie par $u(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_M(x) \end{pmatrix}$, on a que $\text{Im } u$, de dimension finie, est isomorphe à un supplémentaire de $\text{Ker } u = \text{Ker } \varphi_1 \cap \dots \cap \text{Ker } \varphi_M$. On en déduit, puisque E est de dimension infinie, que $\text{Ker } u$ ne peut être réduit à $\{0\}$. Donc il existe $x_{n+1} \in \text{Ker } \varphi_1 \cap \dots \cap \text{Ker } \varphi_M$ non nul, qu'on peut normer.

3°)

a) Posons $z = \sum_{k=1}^n a_k x_k$: par hypothèse, $z \in S_n$, donc il existe j_0 tel que $\|z - z_{j_0}\| \leq \delta$. De plus, en posant

$u = \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k = z + a_{n+1} x_{n+1}$, on a, par linéarité de φ_{j_0} puisque $x_{n+1} \in \text{Ker } \varphi_{j_0}$:

$$1 = \varphi_{j_0}(z_{j_0} + a_{n+1} x_{n+1}) = \varphi_{j_0}(z_{j_0} - z) + \varphi_{j_0}(u) ,$$

d'où par inégalité triangulaire, et puisque $\|\varphi_{j_0}\| = 1$:

$$1 \leq \|\varphi_{j_0}(z_{j_0} - z)\| + \|\varphi_{j_0}(u)\| \leq \delta + \|u\| .$$

Vu la valeur de δ , on en déduit bien $\|u\| \geq 1 - \delta = \frac{1}{1+\varepsilon}$.

b) Remarquons d'abord que l'hypothèse implique $c \geq 1$: prendre $p = q = n$. Donc, la relation à démontrer va être vraie déjà pour $p = q = n + 1$.

De plus, vu l'hypothèse de récurrence et puisque $C \leq C(1 + \varepsilon)$, le seul cas réellement à démontrer est pour $p = n$ et $q = n + 1$ (il impliquera tous les autres cas où $q = n + 1$ par transitivité). Or, l'inégalité est triviale lorsque

$\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$. On peut donc supposer ce vecteur non nul, et le diviser par sa norme N pour en faire un vecteur

$z = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{N} x_k$ de norme 1. L'inégalité du a) dit alors (en l'appliquant à $u = z + \frac{a_{n+1}}{N} x_{n+1}$) :

$$\frac{1}{N} \left\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \right\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} ,$$

soit $N = \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k \right\|$, ce qui donne bien l'inégalité de l'énoncé puisqu'on a $C \geq 1$.

4°) L'inégalité (*) est triviale si on prend $C = 1$ et si on la limite à $p = q = 1$! La question précédente nous montre comment on peut choisir par récurrence x_n et $C = C_n$ pour qu'elle ait lieu pour $1 \leq p \leq q \leq n$. Pour que l'inégalité ait lieu pour tout n , il suffit dans la construction de x_n précédente de trouver une suite d' $\varepsilon_n > 0$ telle qu'il existe un C majorant tous les produits $C_n = 1 \cdot (1 + \varepsilon_1) \cdots (1 + \varepsilon_n)$. Or, en prenant $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ par exemple (ou tout autre terme général d'une série convergente), un tel C existe. En effet, la série de terme général positif $v_n = \ln(1 + \varepsilon_n)$ est convergente, puisque $v_n \sim \varepsilon_n$, donc on peut écrire :

$$1 \cdot (1 + \varepsilon_1) \cdots (1 + \varepsilon_n) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(1 + \varepsilon_k)\right) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \varepsilon_k)\right) = C .$$

On peut donc construire par récurrence une suite vérifiant (*) pour C .

Partie II

Question préliminaire : une application linéaire continue est lipschitzienne, donc elle transforme une suite de Cauchy (en particulier une suite convergente) en une suite de Cauchy. Par densité de F dans E_1 , tout $x \in E_1$ est limite d'une suite x_n d'éléments de F dont la suite des images $T(x_n) \in E_2$ converge d'après ce qui précède, puisqu'on suppose E_2 complet. De plus, $y = \lim T(x_n)$ ne dépend pas du choix de la suite (x_n) convergeant vers x , puisque T est linéaire et continue en 0 : si $x_n \rightarrow x$ et si $z_n \rightarrow x$, alors $T(x_n - z_n) \rightarrow 0$, et donc $\lim T(x_n) = \lim T(z_n)$. On prolonge alors T à E_1 par

$$\forall x \in E_1 \quad \tilde{T}(x) = \lim T(x_n) \quad \text{quand } x_n \rightarrow x .$$

Il s'agit bien d'un prolongement puisque si $x \in F$, on peut prendre dans cette définition la suite constante $x_n = x$. On voit immédiatement, par limite d'une combinaison linéaire, que \tilde{T} reste linéaire, de plus, l'inégalité $\|T(x_n)\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\|$ se prolonge à la limite (la norme est continue) en $\|\tilde{T}(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$. Donc \tilde{T} reste lipschitzienne avec une constante de Lipschitz inférieure ou égale à celle de T , donc égale en fait puisque \tilde{T} prolonge T .

Enfin, ce prolongement de T en \tilde{T} est le seul possible, puisqu'on veut \tilde{T} continue et que F est dense dans E_1 .

1°) Il suffit de montrer, par différence, que la seule suite convenable pour le vecteur 0 est la suite nulle. Supposons donc

$0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$. Par la relation (*), prolongée à la limite $q \rightarrow \infty$, on a par conservation des inégalités larges que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{k=1}^p a_k x_k \right\| \leq 0 .$$

On en déduit que toutes les sommes partielles $\sum_{k=1}^p a_k x_k$ sont nulles, donc par différence, tous les termes $a_k x_k$ sont nuls, et comme les x_k sont non nuls par hypothèse, tous les a_k sont nuls, cqfd.

2°) On a déjà vu que, par passage à la limite $q \rightarrow \infty$ dans (*), on obtenait $\left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| \leq K \cdot \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\|$, ce qui dit bien que $\|P_n\| \leq K$ par définition de la norme subordonnée.

On peut évidemment appliquer P_n à un vecteur donné par une suite (a_k) nulle à partir du rang $k = n+1$, puisqu'alors la série $\sum_{k \geq 1} a_k x_k$ converge trivialement. Donc tous les vecteurs de la forme $x = \sum_{k=1}^n a_k x_k$ sont dans H et par définition même on a $P_n \circ P_n = P_n$. On voit de plus ainsi que $\text{Im } P_n$ est E_n , le sous-espace vectoriel engendré par la famille finie (x_1, \dots, x_n) (tout vecteur de E_n est sa propre image).

3°) On a déjà vu que $F = \cup_{n \geq 1} E_n$ est inclus dans H . Mais H est inclus dans $G = \bar{F}$ puisque les vecteurs de H sont limites de vecteurs de E_n donc de F .

On a donc que $G = \bar{F} \subset \bar{H} \subset \bar{G} = G$, soit que H est dense dans G . De plus, $\text{Im}(P_n) = E_n$ est de dimension finie, donc complet. Donc P_n se prolonge de H à G en une application \tilde{P}_n K -lipschitzienne d'après la question préliminaire. Soit $x \in G$ quelconque et soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe un x_0 dans F tel que $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{K+1}$ et ce x_0 est une combinaison linéaire finie des x_k , donc dans un certain $E_N = \text{Vect}(x_1, \dots, x_N)$. Pour $n \geq N$, on a $\tilde{P}_n(x_0) = P_n(x_0) = x_0$ par définition, donc par inégalité triangulaire :

$$\forall n \quad n \geq N \Rightarrow \|\tilde{P}_n(x) - x\| \leq \|\tilde{P}_n(x - x_0)\| + \|x_0 - x\| \leq (K+1)\|x - x_0\| = \varepsilon ,$$

ce qui prouve que $\tilde{P}_n(x) \rightarrow x$.

4°) Par définition de la somme d'une série comme limite des sommes partielles, l'égalité $x = \tilde{P}_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_n(x))$

n'est que la traduction sous une autre forme de $\tilde{P}_n(x) \rightarrow x$ démontrée avant.

Pour tout $z \in F$, $P_{n+1}(z) - P_n(z)$ est un vecteur de $\text{Vect}(x_{n+1})$. Or un sous-espace vectoriel de dimension finie (ici une droite) est toujours fermé. Donc, quand $z \rightarrow x$, on a toujours que $\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_n(x)$ appartient à $\text{Vect}(x_{n+1})$. De même, $\tilde{P}_1(x) \in \text{Vect}(x_1)$. Il existe donc des constantes $a_n \in \mathbb{R}$ telles que l'égalité pour $x \in G$,

$x = \tilde{P}_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_n(x))$ se traduise par $x = a_1 x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} x_{n+1}$. Tout $x \in G$ est en fait dans H , d'où finalement $H = G$. On en conclut que (x_n) est une suite basique.

Partie III

1°)

- a) Un élément de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ est dans tous les U_{n+1} , donc dans tous les V_n puisque $U_{n+1} \subset V_n$, donc il est dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$.

Mais de même tout élément de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ est dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ puisque $V_n \subset U_n$. On a donc l'égalité demandée par double inclusion.

- b) Le choix de Pierre est correct, puisque $V_n \setminus F_n = V_n \cap (E \setminus F_n)$ est bien un ouvert, inclus dans V_n , comme intersection de deux ouverts. Et il est non vide, car sinon on aurait $V_n \subset F_n$ et F_n ne serait pas d'intérieur vide. De plus, un point de l'intersection des U_n n'est dans aucun F_n par définition, donc il ne peut y avoir de point dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ si la réunion des F_n est E , et la stratégie de Pierre est gagnante.
- c) Montrons d'abord l'indication. Soit F_n une suite de fermés non vides décroissante pour l'inclusion et tels que les diamètres $\delta(F_n)$ tendent vers 0. Pour tout n il existe $x_n \in F_n$, montrons que la suite (x_n) ainsi définie est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Il existe N tel que $\delta(F_N) < \varepsilon$. Alors, pour $n \geq N$ et $p \geq 0$, les éléments x_n et x_{n+p} sont (a fortiori) dans F_N par décroissance de la suite F_n , donc ils vérifient $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \delta(F_N) < \varepsilon$, et la suite (x_n) est bien de Cauchy. Comme E est supposé complet, la suite converge, soit $\ell \in E$ sa limite. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la suite (x_n) est dans F_N à partir du rang $n = N$, donc, comme F_N est fermé, la limite ℓ de $(x_n)_{n \geq N}$ est dans F_N . Ceci étant vrai pour tout N , ℓ est dans l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ qui est bien non vide.

On a donc qu'une suite décroissante de boules fermées dont les rayons tendent vers 0 est d'intersection non vide. La stratégie de Paul est alors la suivante : à chaque choix U_n de Pierre, il choisit pour V_n une boule (ouverte) de rayon $r_n \leq 1/n$ incluse dans U_n , et de telle sorte que la boule fermée $\overline{V_n}$ soit incluse dans U_n . Ce choix est possible, puisqu'un ouvert contient des boules ouvertes, et qu'on peut toujours diminuer leur rayon. La stratégie est gagnante, en effet, les boules $\overline{V_n}$ constituent une suite de décroissante de boules fermées ($\overline{V_{n+1}} \subset U_{n+1} \subset V_n \subset \overline{V_n}$) dont les rayons tendent vers 0, donc leur intersection $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{V_n}$ est non vide. Mais pour tout $n \geq 1$ on a $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$, donc F est inclus dans l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n$ qui est non vide aussi.

- d) C'est clair : Pierre et Paul ne peuvent avoir de stratégie gagnante tous les deux !

2°)

- a) Soit $y \in F$. Comme T est bijective, il existe $z \in E$ tel que $y = T(z)$. On peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $\frac{1}{n}z$ soit dans $B(0, 1)$, mais alors $y = nT\left(\frac{1}{n}z\right)$ est dans $nT(B(0, 1))$ et a fortiori dans X_n . Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n = F$.
- b) Les X_n sont des fermés comme images réciproques du fermé $\overline{T(B(0, 1))}$ par les homothéties continues $x \mapsto \frac{1}{n}x$, $n \geq 1$. Donc, par 1), puisque F est complet, ils ne peuvent être tous d'intérieur vide. Il existe donc $n_0 \geq 1$ et une boule $B(y, \alpha)$ incluse dans $n_0 \overline{T(B(0, 1))}$. Il est clair alors par homothétie que la boule $B(y/n_0, \alpha/n_0)$ est incluse dans $\overline{T(B(0, 1))}$.
- c) $B(0, 1)$ est invariante par la symétrie $s : x \mapsto -x$, donc par linéarité de T , $T(B(0, 1))$ aussi. Mais alors, si $x \in \overline{T(B(0, 1))}$ est limite d'une suite $z_k \in T(B(0, 1))$, $-x$ est limite de la suite $-z_k \in T(B(0, 1))$, et $-x \in \overline{T(B(0, 1))}$. On a donc que $X_1 = \overline{T(B(0, 1))}$ est invariant par s , donc, puisque X_1 contient la boule $B(y_0, 2c)$, il contient aussi la boule $B(-y_0, 2c)$. Soit alors $z \in B(0, 2c)$: on a à la fois $y_0 + z$ et $-y_0 + z$ dans X_1 . Or, $X_1 = \overline{T(B(0, 1))}$ est convexe : en effet, $B(0, 1)$ est convexe, l'image d'un convexe par une application linéaire est convexe, et la fermeture d'un convexe est convexe (si x et y sont limites de x_n et y_n , pour tout $\lambda \in [0, 1]$ fixé $(1 - \lambda)x + \lambda y$ est limite de $(1 - \lambda)x_n + \lambda y_n$). Donc X_1 contient $z = \frac{1}{2}((y_0 + z) + (-y_0 + z))$. On a bien montré l'inclusion $B(0, 2c) \subset X_1$.
- d) $2y$ est dans $B(0, 2c) \subset X_1$, donc il est à distance nulle de $T(B(0, 1))$ et il existe $z \in B(0, 1)$ tel que $\|2y - T(z)\| < c$, soit $\|y - z/2\| < \frac{c}{2}$ et $z_1 = z/2$ convient. Supposons construits z_1, \dots, z_n comme dans l'énoncé, et soit $u = y - T(z_1 + \dots + z_n)$. Par hypothèse, $2^{n+1}u$ est dans $B(0, 2c)$, donc comme précédemment, il existe z dans $B(0, 1)$ tel que $\|2^{n+1}u - T(z)z\| < c$, soit $\|u - z/2^{n+1}\| < \frac{c}{2^{n+1}}$ et $z_{n+1} = z/2^{n+1}$ convient pour prolonger la récurrence.
- e) Puisque la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente, la série $\sum z_n$ est absolument convergente, donc, puisque E est complet, elle est convergente. Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Par propriété de la suite z_n , $T(x_n) = T(z_1 + \dots + z_n)$ converge vers y . Mais par continuité de T , $T(x_n)$ converge vers $T(x)$, donc par unicité d'une limite, $y = T(x)$, soit $x = T^{-1}(y)$.

f) On remarque de plus (inégalité triangulaire prolongée à la limite) que l'élément $x = T^{-1}(y)$ ainsi trouvé vérifie

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \quad ,$$

donc ce qui précède montre l'existence d'un $c > 0$ tel que $\|y\| < c \Rightarrow \|T^{-1}(y)\| < 1$. L'application linéaire T^{-1} est donc bornée en 0, donc continue. (Ou si on veut, par homothétie, on voit qu'elle est $\frac{1}{c}$ -lipschitzienne).

Partie IV

1°) Les propriétés d'espace vectoriel de A , ainsi que les propriétés de norme de l'application $\|(a_n)\|_A = \sup_{N \geq 1} \left\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \right\|$ se montrent sans difficultés.

Montrons la complétude de l'espace vectoriel normé A . On note $(u_n)_k$, $k \in \mathbb{N}$, une suite de Cauchy de suites de A . L'élément d'indice n de la suite $(u_n)_k$ sera noté $u_{n,k}$. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence d'un K tel que

$$k \geq K \text{ et } p \geq 0 \implies \forall N \in \mathbb{N}^* \left\| \sum_{n=1}^N (u_{n,k} - u_{n,k+p}) x_n \right\| < \varepsilon \quad (1) \quad .$$

Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité (1) prouve que la suite $\alpha_k = \sum_{n=1}^N u_{n,k} x_n$ est de Cauchy, donc, puisque E est complet, elle converge. Comme toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes, et en particulier équivalentes à la norme *sup* dans une base, cela signifie que chaque suite $(u_{n,k})_{k \geq 0}$, à n fixé dans $[1, N]$, converge vers un certain réel a_n et que $\alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n x_n$. On a ainsi l'existence d'une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que la suite de suites $(u_n)_k$, $k \geq 0$, converge vers (a_n) au sens de la norme $\| \cdot \|_A$. En effet, lorsqu'on passe à la limite $p \rightarrow \infty$ dans les inégalités (1) à n et N fixés, on voit qu'on a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq K \implies \forall N \in \mathbb{N}^* \left\| \sum_{n=1}^N (u_{n,k} - a_n) x_n \right\| < \varepsilon \\ \implies \sup_{N \geq 1} \left\| \sum_{n=1}^N (u_{n,k} - a_n) x_n \right\| \leq \varepsilon \quad (2) \quad . \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de montrer que la suite (a_n) est dans A en montrant que la série $\sum_{n \geq 1} a_n x_n$ converge, et pour cela, qu'elle satisfait au critère de Cauchy dans E . Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il lui correspond un K comme dans l'inégalité (2). La série $\sum_{n \geq 1} u_{n,K} x_n$ est de Cauchy dans E puisque convergente, donc il existe un N_K tel que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq p \geq N_K \implies \left\| \sum_{j=p}^{j=n} u_{j,K} x_j \right\| \leq \varepsilon \quad (3) \quad .$$

Alors, pour tout $n \geq p \geq N_K$, on a à cause de l'inégalité (2) vraie pour tout N pour le même rang $k = K$ et par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=p}^{j=n} a_j x_j \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^{j=n} (a_j - u_{j,K}) x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{j=p} (a_j - u_{j,K}) x_j \right\| + \left\| \sum_{j=p}^{j=n} u_{j,K} x_j \right\| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \quad . \end{aligned}$$

Donc la suite de suite $(u_n)_k$, $k \in \mathbb{N}$, converge au sens de la norme de A vers la suite $(a_n) \in A$ et A est complet pour cette norme.

2°)

a) L'application Φ est linéaire par théorème sur la combinaison linéaire de deux séries convergentes. Elle est bijective par définition d'une suite basique, ici (x_n) , et parce qu'on restreint l'espace d'arrivée à $G = H$.

Enfin, Φ est continue car 1-lipschitzienne. En effet, quand la série $\sum_{n \geq 1} a_n x_n$ converge dans E , l'inégalité, vraie pour tout $N \geq 1$,

$$\left\| \sum_{n=1}^N a_n x_n \right\| \leq \|(a_n)\|_A,$$

se prolonge à la limite $N \rightarrow \infty$ en $\|\Phi((a_n))\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq \|(a_n)\|_A$.

b) Or A est complet. Comme G , sous-espace vectoriel fermé de E complet, est lui-même complet, on déduit de **II.2** que Φ^{-1} est continue, c'est-à-dire lipschitzienne. La constante K de Lipschitz pour Φ^{-1} donne alors la constante K qui intervient dans l'inégalité (*). En effet, (*) ne dit rien d'autre que $\|(a_n)\|_A \leq K \cdot \|\Phi(a_n)\|$ pour toute suite (a_n) cofinale à 0 élément de A .

Partie V

1°)

a) Prenons une suite de (a_k) telle que $a_k = 0$ pour $k \in [1, p-1]$. L'inégalité (*) se traduit par :

$$\forall k \in [p, q] \quad \left\| \sum_{j=p}^k a_j x_j \right\| \leq K \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\|.$$

En spécialisant à $k = p$ on en déduit que $\|a_p x_p\| = |a_p| \leq K \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\| \leq 2K \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\|$. De plus, par différence, et par inégalité triangulaire, puisque les x_j sont de norme 1 :

$$\forall k \in [p+1, q] \quad |a_k| = \left\| \sum_{j=p}^k a_j x_j - \sum_{j=p}^{k-1} a_j x_j \right\| \leq 2K \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\|, \text{ cqfd.}$$

b) Appelons d la constante $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|$: par hypothèse, le produit $2Kd$ est < 1 . Pour toute suite réelle (a_n) et tout couple d'entiers (p, q) tel que $1 \leq p \leq q$ on a par inégalité triangulaire et par **a)** ci-dessus :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\| &\leq \left\| \sum_{j=p}^q a_j (x_j - y_j) \right\| + \left\| \sum_{j=p}^q a_j y_j \right\| \\ &\leq \left(\text{Max}_{1 \leq k \leq p} |a_k| \right) \sum_{j=p}^{j=q} \|x_j - y_j\| + \left\| \sum_{j=p}^q a_j y_j \right\| \\ &\leq 2Kd \cdot \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=p}^q a_j y_j \right\|. \end{aligned}$$

On en déduit $\left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\| \leq \frac{1}{1-2Kd} \left\| \sum_{j=p}^q a_j y_j \right\|$.

Inversement,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=p}^q a_j y_j \right\| &\leq \left\| \sum_{j=p}^q a_j (x_j - y_j) \right\| + \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\| \\ &\leq \left(\text{Max}_{1 \leq k \leq p} |a_k| \right) \sum_{j=p}^{j=q} \|x_j - y_j\| + \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\| \\ &\leq 2 \left\| \sum_{j=p}^q a_j x_j \right\|. \end{aligned}$$

On a donc que les séries $\sum_{n \geq 1} a_n x_n$ et $\sum_{n \geq 1} a_n y_n$ sont simultanément de Cauchy : si l'une l'est, l'autre l'est aussi et inversement.

c) On procède comme précédemment. En utilisant la condition (*) en plus, on obtient les majorations :

$$\left\| \sum_{j=1}^p a_j y_j \right\| \leq 2 \left\| \sum_{j=1}^p a_j x_j \right\| \leq 2K \left\| \sum_{j=1}^q a_j x_j \right\| \leq \frac{2K}{1-2Kd} \left\| \sum_{j=1}^q a_j y_j \right\| .$$

d) On en déduit par le **II.** que (y_n) est une suite basique de Y . De plus, vu le **b)**, l'espace A des suites définies au **IV.** est le même pour la suite (x_n) basique de G que pour la suite (y_n) basique de Y . Alors, T peut être vu comme la composée

$$\Phi_Y \circ \Phi_X^{-1} : G \xrightarrow{\Phi_X^{-1}} A \xrightarrow{\Phi_Y} Y ,$$

c'est donc bien une application linéaire bijective bi-continue.

2°)

a) On a déjà vu :

$$\left\| \sum_{j=1}^q a_j (x_j - y_j) \right\| \leq \left(\max_{1 \leq k \leq p} |a_k| \right) \sum_{j=p}^{j=q} \|x_j - y_j\| \leq 2Kd \left\| \sum_{j=1}^q a_j x_j \right\| ,$$

donc par passage à la limite $q \rightarrow \infty$, on en déduit

$$\|x - T(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j (x_j - y_j) \right\| \leq 2Kd \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right\| \leq 2Kd \|x\| .$$

Ceci montre que la norme triple subordonnée de $u = id - T$ est $\leq 2Kd < 1$.

b) C'est du cours ... !

c) Comme $T \circ S = id$, l'image de T est E tout entier. Donc T réalise un isomorphisme de E sur E et $Y = E$ ■

*
* *