

\* BANQUE FILIERE PT \*

**Epreuve de Mathématiques I-B****durée 4h**

---

On désigne par

- $\mathbb{N}$  : l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 0,
- $\mathbb{R}$  : le corps des nombres réels,
- $E$  : l'algèbre des ( fonctions ) polynômes d'une variable à coefficients réels,
- $E_n$  : le sous-espace vectoriel de  $E$  formé des ( fonctions ) polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et de la fonction nulle.

On note  $w$  l'application de  $] -1, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ .**PARTIE I**On définit la suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par les relations

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_n(x) &= 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ pour tout } n \geq 2. \end{aligned}$$

1°) Quel est le degré de  $T_n$  ? Quel est le coefficient du terme de plus haut degré de  $T_n$  ?  
Quelle est la parité de  $T_n$  ?

2°) Montrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et tout réel  $\theta$ ,

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

3°) Préciser les valeurs de  $T_n(1)$ ,  $T_n(-1)$  et  $T_n(0)$ .

Déterminer les zéros de  $T_n$  et les extremums locaux de  $T_n$ .

(on pourra commencer par rechercher ces zéros dans  $[-1, 1]$ ).

## PARTIE II

1°) Soit  $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

L'intégrale  $\int_{-1}^1 w(x)\varphi(x) dx$  est-elle convergente ?

2°) Pour tout couple  $(P, Q)$  de  $E^2$ , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 w(x)P(x)Q(x) dx$$

Montrer que l'on munit ainsi  $E$  d'une structure d'espace préhilbertien.

3°) Calculer, pour tout couple  $(i, j)$  de  $\mathbb{N}^2$ ,  $\langle T_i, T_j \rangle$ .

Que conclure ?

4°) Soit  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  vérifiant les conditions suivantes :

i)  $Q_n$  est de degré  $n$ ,

ii)  $\langle Q_i, Q_j \rangle = 0$  si  $i \neq j$ .

a) Montrer que  $(Q_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  est une base de  $E_{n-1}$ .

En déduire que  $Q_n$  est orthogonal à tout élément de  $E_{n-1}$ .

b) En déduire qu'il existe une suite de réels non nuls  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$Q_n = \alpha_n T_n.$$

5°) Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, et de classe  $C^1$  par morceaux. Montrer qu'il existe une suite de réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ , on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x)$$

Comment les coefficients  $a_n$  s'expriment-ils à l'aide de  $f$  ?

( on pourra considérer la fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g(\theta) = f(\cos \theta)$  )

## PARTIE III

Dans cette partie, on fixe  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour tout  $P \in E_n$ , on pose

$$u_n(P)(x) = (1-x^2)P''(x) - xP'(x).$$

où  $P'$  et  $P''$  désignent les dérivées ( respectivement première et seconde ) de  $P$ .

1°) Montrer que  $u_n : P \mapsto u_n(P)$  est un endomorphisme de  $E_n$ .

2°) Ecrire la matrice de  $u_n$  dans la base canonique  $(x^i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $E_n$ .

En déduire les valeurs propres de  $u_n$ .

3°) Déterminer les sous-espaces propres de  $u_n$ , en précisant pour chacun une base.

(On remarquera que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $y(\theta) = \cos(k\theta)$  est solution de  $y'' + k^2 y = 0$ )

4°) Montrer que  $u_n$  est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini dans la partie II.

## PARTIE IV

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $f_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = (1 - x^2)^{n-1/2}$$

1°) Montrer qu'il existe un polynôme  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$  tel que :

$$f_n^{(n)}(x) = w(x) P_n(x)$$

(On pourra, par exemple, remarquer que  $f_n(x) = (1-x)^{n-1/2} \cdot (1+x)^{n-1/2}$ )

2°) Déterminer les deux fonctions rationnelles  $R$  et  $S$  telles que

$$w'(x) = R(x) w(x) \quad \text{et} \quad w''(x) = S(x) w(x)$$

3°) Montrer que :

$$(1-x^2)f_n'(x) + (2n-1)x f_n(x) = 0$$

En déduire que :

$$(1-x^2)f_n^{(n+2)}(x) - 3x f_n^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f_n^{(n)}(x) = 0$$

4°) Montrer enfin que  $P_n$  est un vecteur propre de l'endomorphisme  $u_n$  défini en partie III.

Les deux vecteurs  $P_n$  et  $T_n$  sont-ils liés ?

## PARTIE V

1°)  $\alpha \in ]0, \pi[$  étant fixé, on définit, pour tout entier  $p \geq 1$ , la fonction  $\varphi_p : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  par les relations :

$$\varphi_p(\theta) = \frac{\cos(p\theta) - \cos(p\alpha)}{\cos(\theta) - \cos(\alpha)} \quad \text{si } \theta \neq \alpha$$

$$\varphi_p(\alpha) = p \frac{\sin(p\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

a) Vérifier que  $\varphi_p$  est continue.

b) Montrer que :

$$\int_0^\pi \varphi_1(\theta) d\theta = \pi \varphi_1(\alpha) \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \varphi_2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \varphi_2(\alpha).$$

c) Etablir la relation :

$$\varphi_p(\theta) = 2 \cos(\alpha) \varphi_{p-1}(\theta) - \varphi_{p-2}(\theta) + 2 \cos((p-1)\theta),$$

pour tout entier  $p \geq 3$ .

d) En déduire que, pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $\int_0^\pi \varphi_p(\theta) d\theta = \frac{\pi}{p} \varphi_p(\alpha)$

On suppose  $n$  fixé et on pose, pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ ,

$$L_k(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_k}$$

où  $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$  est l'ensemble des zéros de  $T_{n+1}$  (classés, par exemple, par valeurs croissantes).

2°) Montrer que la famille  $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $E_n$ .

Soit  $P \in E_n$  : écrire  $P$  dans la base  $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ . On exprimera les coefficients de cette décomposition à l'aide des nombres  $P(x_k)$  et  $L_k(x_k)$  où  $0 \leq k \leq n$ .

3°) a) Montrer que, pour tout polynôme  $P \in E_n$ , on a :

$$\int_{-1}^1 w(x) P(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n P(x_k).$$

b) Montrer que l'égalité précédente reste vraie pour tout polynôme  $P \in E_{2n+1}$ .