Capes 1984
Deuxième Composition de Mathématiques
(Durée : 5 heures)

Soit $\mathscr{V}$ un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 3 sur le corps de réels. On considère l'espace vectoriel produit $\mathbb{R} \times \mathscr{V}$, de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, dont les éléments sont des couples $(x, \overrightarrow{U})$ où x est un réel et $\overrightarrow{U}$ un vecteur de $\mathscr{V}$. On définit sur $\mathbb{R} \times \mathscr{V}$ une multiplication par :

$$(x, \overrightarrow{U})(y, \overrightarrow{V}) = (xy - \overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}, x\overrightarrow{V} + y\overrightarrow{U} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V})$$

pour tous réels x et y, pour tous vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ de GV, où $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ désignent respectivement le produit scalaire et la produit vectoriel de $\overrightarrow{U}$ par $\overrightarrow{V}$.

Cette multiplication a pour élément neutre $e = (1, \vec{0})$; l'espace vectoriel $\mathbb{R} \times \mathscr{V}$ muni de la multiplication est noté $\mathbb{H}$ et ses éléments sont appelés *quaternions*.

Partie I

1. Déterminer les quaternions $q = (x, \overrightarrow{U})$ tels que $q^2 = e$, puis ceux tels que $q^2 = -e$.
2. Soit $\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$.

   (a) Montrer que $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ est une base orthonormale directe de $\mathscr{V}$ si et seulement si les trois quaternions $i = (0, \overrightarrow{I})$, $\quad j = (0, \overrightarrow{J})$, $\quad k = (0, \overrightarrow{K})$ vérifient :

   $$\begin{cases} i^2 = j^2 = -e \\ ij = k \end{cases}$$

   (b) lorsqu'il en est ainsi, vérifier que $ji = -k$ et calculer k^2, jk, kj, ki, ik.
   Vérifier les cinq égalités :

   $$i^2 i = ii^2,\ i^2 j = i(ij),\ (ij)i = i(ji),\ (ij)j = ij^2,\ (ij)k = i(jk).$$

   (c) En déduire sans autre calcul que la multiplication de $\mathbb{H}$ est associative. [On pourra utiliser le fait (évident) que la multiplication est une forme bilinéaire de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$].

3. Étant donné un quaternion $q = (x, \overrightarrow{U})$, déterminer les quaternions $r = (y, \overrightarrow{V})$ tels que $rq = qr$.
   En déduire que les quaternions q tels que $rq = qr$ pour tout quaternion r ; ces quaternions sont dits *réels*.

4. Montrer que l'addition et la multiplication de $\mathbb{H}$ lui confère la structure de corps (non commutatif).

5. à tout quaternion $q = (x, \overrightarrow{U})$ on associe son *conjugué* $\overline{q} = (x, -\overrightarrow{U})$ et le réel $N(q) = x^2 + \overrightarrow{U}.\overrightarrow{U}$. Ainsi les quaternions égaux à leur conjugué sont les quaternions réels. Les quaternions opposés à leur conjugué, c'est à dire de la forme $(0, \overrightarrow{U})$ sont dits *purs*.

   (a) Exprimer les produits $q\overline{q}$ et $\overline{q}q$ en fonction de $N(q)$.

   (b) Exprimer le conjugué $\overline{qr}$ du produit qr de deux quaternions q et r quelconques en fonction des conjuguées $\overline{q}$ et $\overline{r}$. En déduire $N(qr)$ en fonction de $N(q)$ et $N(r)$.

   (c) Montrer que les quaternions q tels que $N(q) = 1$ forment un groupe pour la multiplication des quaternions. Ce groupe sera noté S dans toute la suite.

   (d) Montrer que pour tout quaternion q non nul il existe un unique couple (ρ, u) où ρ est un réel positif et u un quaternion de S tel que $q = \rho u$.

6. L'application $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}$ est une norme euclidienne. Ceci permet de considérer dorénavant $\mathbb{H}$ comme un espace vectoriel euclidien pour cette norme.

   Soit $q = (0, \overrightarrow{U})$ et $r = (0, \overrightarrow{V})$ deux quaternions purs. Exprimer le produit scalaire de q et r (pour la structure euclidienne ci-dessus de $\mathbb{H}$) en fonction de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$.

   Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

   (i) q et r sont orthogonaux ;

   (ii) le produit qr est un quaternion pur.

   (iii) $qr + rq = 0$.

Partie II

1. (a) Soit θ un nombre réel et $\overrightarrow{I}$ un vecteur unitaire de $\mathscr{V}$. On considère la quaternion $s = (\cos\theta, \sin\theta\,\overrightarrow{I})$ de S et l'application φ_s de $\mathbb{H}$ dans lui-même définie par $\varphi_s(q) = sqs^{-1}$ pour tout quaternion q.
   Montrer que si $q = (x, \overrightarrow{U})$ et si $\varphi_s(q) = (x', \overrightarrow{U'})$ alors :

   $$x = x' \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{U'} = R_s(\overrightarrow{U})$$

   où R_s est une rotation de $\mathscr{V}$, ne dépendant pas de q, laissant $\overrightarrow{I}$ fixe, et dont on précisera l'angle.

   (b) Vérifier que par $s \mapsto R_s$ on établit un morphisme surjectif du groupe S sur le groupe O^+ des rotations de $\mathscr{V}$. Quel est le noyau de ce morphisme ?
   En déduire un isomorphisme faisant intervenir S et O^+.

   (c) Montrer que si p et q sont deux quaternions purs de S, alors il existe un quaternion s de S tel que $q = sqs^{-1}$. Le quaternion s peut-il être choisi pur ?

2. On se propose de démontrer qu'il existe un seul morphisme de O^+ dans S. Pour cela on considère la partie Σ de O^+ formée des rotations d'angle π.

(a) Soit ψ un morphisme de O^+ dans S. Montrer que pour tout σ de Σ on a $\psi(\sigma) = e$ ou $\psi(\sigma) = -e$.

(b) Montrer que si σ et σ' dont deux éléments de Σ il existe un élément σ'' de Σ tel que $\sigma' = \sigma'' \circ \sigma \circ \sigma''$.

En déduire que $\psi(\sigma) = \psi(\sigma')$.

(c) Montrer que $\psi(O^+) = \{e\}$.

3. Soit G un sous groupe distingué de S. On suppose que G contient un élément distinct de e te de $-e$. On se propose de montrer que $G = S$. On pourra utiliser le fait qu'un sous groupe G de S et distingué si et seulement si $\varphi_s(G) \subset G$ pour tout s de S.

(a) Montrer à laide de la question II 2. que, si G contient un quaternion pur alors $G = S$.

(b) On considère deux quaternions purs i et j de S orthogonaux selon la définition I 6. et $k = ij = -ji$. On suppose que G contient un quaternion $ae + bi$, où a et b sont deux réels non nuls avec $a^2 + b^2 = 1$.

Montrer que G contient $ae + bj$, puis $a^2 + ci$, avec $c = b\sqrt{1 + a^2}$. En déduire que G contient un quaternion $s = \alpha e + \beta i$ où α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Montrer que G contient un quaternion pur. (On le cherchera sous la forme $sqs^{-1}q^{-1}$, où $q = xe + yj$ avec x et y réels, est un élément de S).

(c) Montrer que $G = S$.

En déduire que O^+ n'a pas de sous-groupes distingués non triviaux.

Partie III

1. Vérifier que l'application $\varphi_s : q \mapsto sqs^{-1}$ est un automorphisme du corps et de l'espace vectoriel $\mathbb{H}$.

2. Soit τ un morphisme du corps $\mathbb{R}$ dans lui-même (en particulier, on a $\tau(1) = 1$).

(a) Montrer que $\tau(r) = r$ pour tout rationnel r.

(b) Montrer que si x est un réel positif, il en est de même pour $\tau(x)$. En déduire que τ est croissant.

(c) Montrer que τ est l'identité.

3. Soit μ un automorphisme du corps $\mathbb{H}$.

(a) Montrer que μ laisse stable l'ensemble des quaternions réels, puis, laisse fixe tout quaternion réel.

En déduire que μ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit q et r deux quaternions purs, et orthogonaux de S. Montrer que $\mu(q)$ et $\mu(s)$ sont encore purs, orthogonaux et dans S.

Soit q' et r' deux quaternions purs et orthogonaux de S. Démontrer qu'il existe un unique automorphisme du corps $\mathbb{H}$ transformant q en q' et r en r'.

(c) Montrer qu'il existe s dans S tel que $\mu = \varphi_s$.

Partie IV

1. On considère une base orthonormale (e, i, j, ij) de $\mathbb{H}$.

   (a) Soit $r = ae + bi$ où a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Démontrer que l'application δ_r de $\mathbb{H}$ dans lui-même défini par $\delta_r(q) = rq$ pour tout quaternion q est une transformation orthogonale directe de l'espace euclidien $\mathbb{H}$ en donnant sa matrice dans la base (e, i, j, ij).

   Montrer plus généralement qu'il en est de même pour l'application $\delta_{r,s}$ de $\mathbb{H}$ dans lui-même définie pour tout r et s de S par $\delta_{r,s}(q) = rqs^{-1}$ pour tout quaternion q.

   (b) Vérifier que par $(r, s) \mapsto \delta_{r,s}$ on établit un morphisme surjectif du groupe produit $S \times S$ sur le groupe Ω des transformations orthogonales directes de l'espace euclidien $\mathbb{H}$ (on pourra vérifier le fait que, d'après le II 1. b) les éléments de Ω qui laissent e fixe sont les φ_s).
   Quel est le noyau de ce morphisme ?
   En déduire un isomorphisme faisant intervenir $S \times S$ et Ω.

2. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les quaternions r et s de S pour que $\delta_{r,s}$ soit une involution distincte de $Id_{\mathbb{H}}$ (identité de $\mathbb{H}$) et de $-Id_{\mathbb{H}}$.

   (b) Montrer que tout élément de Ω est produit de deux symétries orthogonales de $\mathbb{H}$ par rapport à des plans vectoriels.

   (c) En déduire les morphismes de Ω dans $S \times S$.

3. (a) Donner un exemple de groupe produit $G \times G$ possédant un sous groupe distingué qui n'est pas le produit $H_1 \times H_2$ de deux sous groupes distingués H_1 et H_2 de G.

   (b) Dans toute la suite K est un sous groupe distingué du groupe produit $S \times S$. On note K_1 et K_2 les images respectives de K par les applications $(r, s) \mapsto r$ et $(r, s) \mapsto s$ de $S \times S$ dans S. Vérifier que K_1 et K_2 sont deux sous groupes distingués de S et que K est un sous groupe distingué de $K_1 \times K_2$.

   (c) Déterminer K lorsque $K_1 = \{e\}$, puis lorsque $K_1 = K_2 = \{e, -e\}$.

   (d) Montrer les résultats suivants :

      (i) s'il existe un quaternion pur p tel que (e, p) soit un élément de K, alors $\{e\} \times S$ est inclus dans K.
      En déduire qu'alors $K = K_1 \times K_2$.

      (ii) S'il existe un quaternion pur p tel que $(-e, p)$ soit dans K alors il existe un quaternion pur p' tel que (e, p') soit dans K.

      (iii) S'il existe un quaternion non réel s tel que $(e, -s)$ soit dans K, alors il existe un quaternion pur p tel que (e, p) soit dans K.

      (iv) Si $K_1 = K_2 = S$ alors il existe un quaternion non réel s tel que $(-e, s)$ soit dans K (on pourra considérer le carré d'un élément (p, r) de K, avec p pur).

   (e) Donner le nombre et la liste des sous-groupes distingués de $S \times S$, puis de Ω.