**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)**

CONCOURS D'ADMISSION 1986

MATHÉMATIQUES

1ère ÉPREUVE

OPTIONS M, P' et T.A.

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I

Dans tout l'énoncé, le corps de base est celui des nombres réels. Toutefois, l'usage des nombres complexes sera admis, et pourra, dans beaucoup de questions, être très utile.

1° - a) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles l'intégrale :

$$I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt . dt}{1 - x \cos t}$$

est convergente.

b) Montrer que la fonction I_n est définie sur un ensemble symétrique par rapport à l'origine. Etudier la parité de I_n selon les valeurs de n.

2° - a) Calculer, pour $|x| < 1$, $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

b) Lorsque $n \geqslant 1$ et $|x| < 1$, trouver une relation simple entre $[I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)]$ et $I_n(x)$.

c) En déduire, pour $n \geqslant 1$ et $|x| < 1$, la valeur de $I_n(x)$.

3° - a) Pour $t \in \mathbb{R}$, développer en série entière les applications qui, à x réel tel que $|x| < 1$, associent $\dfrac{1}{x^2 - 2x \cos t + 1}$ et $\dfrac{1 - x^2}{x^2 - 2x \cos t + 1}$.

b) En déduire, en posant $x = e^{-\alpha}$, où α est un réel strictement positif, le développement en série de Fourier de l'application qui, à t réel, associe $\dfrac{1}{\operatorname{ch} \alpha - \cos t}$ $(\alpha > 0)$.

c) Retrouver, à l'aide du développement précédent, la valeur de $I_n(x)$ pour $|x| < 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

4° - a) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, y réel tel que $|y| > 1$ et t réel tel que $0 < t < \pi$, le produit :

$$(y^2 - 2y \cos t + 1).\sum_{n \geq p+1} \frac{\sin (n+1) t}{\sin t} \, y^{p-n} ,$$

dont on devra donner une expression simple.

b) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, le quotient et le reste de la division euclidienne de X^{p+2} par $(X^2 - 2X \cos t + 1)$ selon les puissances décroissantes de X.

c) Calculer, pour $n \geq 2$ et k entier tel que $1 \leq k \leq E(\frac{n}{2})$ [en notant $E(u)$ la partie entière du réel u], l'intégrale $I_n\left(\dfrac{1}{\cos\left[(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right]}\right)$.

5° - a) Calculer, pour n et p entiers positifs ou nuls, $\displaystyle\int_0^\pi \cos nt.\cos^p t.dt$.

b) En déduire le développement en série entière de la restriction de I_n à $]-1, 1[$.

c) Etudier, pour $0 < x < 1$ fixé, la monotonie et la convergence de la suite $[I_n(x)]_{n \in \mathbb{N}}$.

Déterminer, pour n fixé, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} [I_n(x) - I_{n+1}(x)]$.

d) Etudier les variations de la restriction de I_n à $]-1, 1[$. Préciser le sens de concavité du graphe correspondant.

Tracer, dans un même repère, les graphes obtenus pour $0 \leq n \leq 4$.

-§-