CCP 2007 - ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

Corrigé rédigé par Alain Schauber : alain.schauber@prepas.org

EXERCICE

a. F est un compact de $\mathbb{R}^2$ et f est continue sur $\mathbb{R}^2$ d'après les théorèmes généraux sur la continuité et la stabilité par les opérations de la continuité des fonctions de deux variables, donc f est bornée sur F et y atteint ses bornes; en particulier, f atteint sa borne supérieure M sur F.

b. D'après les théorèmes généraux sur la classe d'une fonction de deux variables, f est en fait de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc aussi sur l'ouvert Ω. Par suite, si sa borne supérieure sur F est atteinte en un point de l'intérieur Ω de F, elle constitue un extremum de f sur Ω et est par conséquent nécessairement atteinte en un point critique de f sur Ω.

Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \dfrac{1-2xy-x^2}{(1+y^2)(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-2xy-x^2 = 0$ et par symétrie $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 0 \Leftrightarrow 1-2xy-y^2 = 0$.

Les points critiques sont donc les solutions du système $\begin{cases} 1-2xy-x^2 = 0 \\ 1-2xy-y^2 = 0 \end{cases}$, soit $\{(1/\sqrt{3};1/\sqrt{3}),(-1/\sqrt{3};-1/\sqrt{3})\}$.

Dans le second cas on obtient une valeur négative pour f, ce qui est à exclure parce que par exemple $f(0;0) = 0$.
Il ne reste donc que la première possibilité, et on a $f(1/\sqrt{3};1/\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}/8$.

Si la borne supérieure est atteinte sur Ω alors nécessairement : $\boxed{M = 3\sqrt{3}/8}$

c. Sur la frontière de F, l'une des deux coordonnées est égale à 0 ou à 1.

Par symétrie, on peut supposer qu'il s'agit de y. Or $f(x,0) = \dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ (car $1+x^2-2x = (1-x)^2 \geq 0$) et $\dfrac{1}{2} < \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

D'autre part $f(x,1) = \dfrac{x+1}{2(1+x^2)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x;1) = \dfrac{1-2x-x^2}{2(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (1-x(1+\sqrt{2}))(1-x(1-\sqrt{2})) = 0$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto f(x,1)$ admet sur [0;1] un maximum au point $1/(1+\sqrt{2})$, l'autre zéro de la dérivée étant en dehors de l'intervalle.
Mais la calculatrice donne $f(1/(1+\sqrt{2}),1) \cong 0{,}6035533905$ tandis que $3\sqrt{3}/8 \cong 0{,}6495190530$.

Ainsi, le maximum de f sur la frontière de F est $\underline{f(1/(1+\sqrt{2}),1) < \dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$ et par conséquent $\underline{M = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$.

PROBLÈME : ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

PARTIE PRÉLIMINAIRE

1. Fonction Gamma d'Euler

a. Pour tout $x > 0$, la fonction $f : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

D'autre part, on sait que $\forall x > 0, \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^{x+1} = 0$, donc $e^{-t}t^{x-1} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison avec une fonction de Riemann intégrable sur $[1;+\infty[$ on en déduit que f est intégrable sur $[1;+\infty[$.
Au voisinage de 0, $f(t) \sim t^{x-1}$ avec $x-1 > -1$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann intégrable sur $]0;1]$ on en déduit que f est intégrable sur $]0;1]$ [. On peut donc conclure que:

f est intégrable sur $]0;+\infty[$

b. $x > 0 \Rightarrow x+1 > 0$ et par intégration par parties on obtient $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,dt = \underbrace{\left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty}}_{=0} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = x\Gamma(x)$.

$$\underline{\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, on en déduit immédiatement par récurrence que $\boxed{\forall n \geq 1, \Gamma(n) = (n-1)!}$.

2. Fonction zêta de Riemann

a. $\forall x > 1, \forall k \geq 2, \frac{1}{k^x} = \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^x}$. Donc $\forall x > 1, \forall n \geq 1, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$.

$$\underline{\forall x > 1, \forall n \geq 1, R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}}$$

b. $p \geq 2 \Rightarrow p > 1$. Donc $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \varsigma(p)\right| = |-R_n(p)| = R_n(p)$. D'après la question précédente, pour rendre cette quantité inférieure à ε, il suffit de rendre $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \leq \varepsilon$. Pour cela, il suffit que $\boxed{n \geq \left(\frac{1}{\varepsilon(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}}$.

c. Pour $p = 7$ et $\varepsilon = 10^{-6}$ la calculatrice donne $n \geq 7{,}418363756$; donc $n = 8$ convient.

On calcule donc $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k^7}$ et la calculatrice fournit $1{,}008348846$. Donc $\underline{\varsigma(7) = 1{,}008348846}$ à 10^{-6} près.

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

3. Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur un intervalle étant continue sur cet intervalle, la fonction f est continue sur le <u>segment</u> $[a;b]$, donc intégrable sur ce segment.

D'autre part, la convergence uniforme peut s'exprimer par la limite $u_n = \left(\max_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.

Mais $\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b u_n dx = (b-a)u_n \to 0$. D'où le <u>**TH1**</u>.

4. Exemples et contre-exemples

a. Soit pour $n \geq 2$ la fonction f_n dont le graphe sur $[0;1]$ est formé des 4 segments de droites joignant en une ligne brisée continue les 5 points suivants: $(0;0) \to \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2};0\right) \to \left(\frac{1}{n};n^2\right) \to \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2};0\right) \to (1;0)$.

L'intégrale de f_n sur $[0;1]$ est l'aire d'un triangle de base $\frac{2}{n^2}$ et de hauteur n^2, donc elle vaut toujours 1.

Mais $f_n(0) = 0$ et si $x > 0$ alors $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x$, donc à partir du rang p on aura $f_n(x) = 0$.

Par conséquent la suite f_n converge simplement vers la fonction nulle, dont l'intégrale vaut 0.
Il en résulte d'après le théorème **TH1** (et sans qu'on ait besoin de le vérifier directement) que cette convergence n'est pas uniforme. Bien entendu, cela apparaît en remarquant que $\max_{[0;1]} f_n = n^2 \not\to 0$.

b. Il suffit de considérer la suite des fonctions $f_n: x \mapsto x^n$, dont l'intégrale vaut $\frac{1}{n+1}$, tandis que cette suite converge simplement sur $[0;1]$ vers la fonction f nulle partout sauf en 1 ou elle vaut 1.
f n'est pas continue (donc la convergence n'est pas uniforme) mais est continue par morceaux et son intégrale vaut bien $0 = \lim \frac{1}{n+1}$.

5. Cas d'un intervalle quelconque

a. <u>f_n est dérivable sur I</u> et $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}[n-x]$. Donc f_n admet sur I un maximum pour $x = n$.

Or, d'après l'équivalent de Stirling, $f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0$, ce qui prouve que <u>la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur I</u>. Nous sommes donc en présence des hypothèses du **TH1**.

D'autre part, les fonctions f_n sont intégrables sur I avec la même justification qu'à la question **1.a.** et on remarque que $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1$ d'après **1.b.**, alors que la fonction nulle est intégrable d'intégrale nulle sur I. La conclusion du **TH1** est donc falsifiée.

<u>Le **TH1** tombe en défaut si l'intervalle n'est pas borné</u>

b.i. D'après la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f, on peut écrire: $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, \forall x \in I, \left| f(x) - f_n(x) \right| \leq 1$.

En prenant $n = p$ on a alors $\exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \left| \left| f(x) \right| - \left| f_p(x) \right| \right| \leq \left| f(x) - f_p(x) \right| \leq 1$ et alors $\forall x \in I, \left| f(x) \right| \leq 1 + \left| f_p(x) \right|$.

La fonction f_p étant supposée intégrable et la fonction constante égale à 1 étant intégrable sur l'intervalle borné I, il en est de même de $1 + \left| f_p \right|$, puis par théorème de domination, de f.

<u>f est intégrable sur I</u>

ii. La démonstration se fait de façon identique à celle de la question **3.**, en remplaçant à la fin $b - a$ par $\ell(I)$.

<u>Le **TH1** est vrai sur un intervalle borné</u>

6. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

a. La question est un peu mal posée. En fait, s'il est vrai qu'il est inutile de vérifier que les fonctions f_n sont intégrables, il faudrait quand même le préciser avant d'évoquer leurs intégrales dans le **TH2**, de même qu'on le fait pour f. D'autre part, le **TH2** étant admis dans le cours, cette question n'est pas un rappel.

En fait, l'intégrabilité des f_n résulte de leur domination par la fonction intégrable positive φ, et cette domination reste vraie pour f par passage à la limite.

b.i. On peut reprendre l'exemple de la suite de fonctions proposée en **4.b.**, dont on a vu qu'elle convergeait simplement, mais pas uniformément sur le segment $[0;1]$ et qui est dominée sur ce segment par la fonction intégrable constante égale à 1. Elle vérifie donc les hypothèses du **TH2** et en satisfait bien la conclusion.

ii. La suite de fonctions continues $x \mapsto \frac{e^{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}}{1+x^2}$ converge simplement sur $[0;+\infty[$ vers $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et est dominée sur cet intervalle par la fonction continue intégrable positive $x \mapsto \frac{e}{1+x^2}$. Elle vérifie donc les hypothèses du **TH2**. Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, on peut en déduire que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}}$.

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIES DE FONCTIONS

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Une série de réels (respectivement de fonctions) n'est autre que la suite formée des sommes partielles et c'est d'ailleurs dans ce sens qu'est prise la notion de convergence uniforme d'une série de fonctions; de plus, la somme d'une telle série (lorsqu'elle converge) est la limite de la suite associée. Enfin, une somme finie de fonctions continues est continue. Il en résulte que le **TH3** n'est rien d'autre que le **TH1** appliqué à la suite des sommes partielles des fonctions f_n.

8. Application : séries trigonométriques et séries de Fourier

a. Le théorème de Parseval affirme que si une série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ est la série de Fourier d'une fonction réelle f, 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors la série $\sum_{n\geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$ converge et plus précisément que $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) \right|^2 dt$.

Mais pour la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$, la série $\sum_{n\geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$ est la série divergente $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

<u>Toute série trigonométrique n'est pas la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique continue par morceaux</u>

b. Si la série de fonctions $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$ converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$, alors f est continue comme limite uniforme d'une série de fonctions continues et 2π-périodique comme limite simple d'une suite de fonctions 2π-périodique. Pour répondre à la question il suffit donc de montrer que la série $\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$ est la série de Fourier de f. Comme $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq1}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$, on peut appliquer le **TH3** et on a pour $p\geq1$:

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos px\,dx=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos px\,dx+\sum_{n\geq1}\left[a_n\int_0^{2\pi}\cos nx\cos px\,dx+b_n\int_0^{2\pi}\sin nx\cos px\,dx\right].$$

En utilisant les résultats rappelés dans l'énoncé, on en déduit que $\int_0^{2\pi}f(x)\cos px\,dx=a_p\pi$. On en déduit que pour $p\geq1$, a_p est bien le coefficiet de Fourier "pair" d'indice p de f. On le montre de même pour $p=0$ et pour les b_p.

Une série trigo uniformément convergente est la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique continue

9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions et application au théorème de Hardy

a. Sur tout segment $[\alpha;\beta]$, on a $\left|\frac{x^n}{n!}\right|\leq\frac{M^n}{n!}$, où $M=\max\{|\alpha|;|\beta|\}$.

La série $\sum a_n$ étant convergente, la suite (a_n) tend vers 0 et est donc bornée (cette propriété est d'ailleurs suffisante pour conclure dans cette question). Il en résulte que pour tout $\forall x\in[\alpha;\beta]$, $\left|\frac{a_nx^n}{n!}\right|\leq\max|a_n|\frac{M^n}{n!}$, qui est le terme général d'une série convergente (vers $(\max|a_n|)e^M$).

Par conséquent la série $\sum_{n\geq0}\frac{a_nx^n}{n!}$ est normalement convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$. Il en résulte qu'elle est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ et que sa limite est continue sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction $x\mapsto f(x)e^{-x}$ est la limite simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq0}\frac{a_nx^ne^{-x}}{n!}$. Ces fonctions sont toutes continues et intégrables sur $[0;+\infty[$ et $\int_0^{+\infty}\left|\frac{a_nx^ne^{-x}}{n!}\right|dx=|a_n|$, comme cela a été vu en **5.a.**

Par hypothèse, la série $\sum|a_n|$ converge et nous sommes donc dans les hypothèses du **TH4**.

Par suite $\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{a_nx^ne^{-x}}{n!}dx\right)=\underline{\sum_{n=0}^{+\infty}a_n}$.

10. Cas où les TH3 et TH4 ne s'appliquent pas

a. La série de fonctions $\sum_{n\geq0}(-1)^nx^n$ est une série entière connue, de rayon de convergence 1, et dont la somme sur $[0;1[$ est la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x}$. Or $\left|\frac{1}{1+x}-\sum_{n=0}^{p}(-1)^nx^n\right|=\left|\frac{(-1)^{p+1}x^{p+1}}{1+x}\right|\xrightarrow[x\to1^-]{}\frac{1}{2}$.

Donc $\sup_{x\in[0;1[}\left|\frac{1}{1+x}-\sum_{n=0}^{p}(-1)^nx^n\right|\not\to0$ et par suite la série $\sum_{n\geq0}(-1)^nx^n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1[$.

b. La série converge simplement vers une fonction continue sur $[0;1[$ et elle est formée de fonctions continues et bornées, donc intégrables sur $[0;1[$. On va donc mettre en défaut la dernière hypothèse du **TH4**.

$\sum\int_0^1\left|(-1)^nx^n\right|dx=\sum\frac{1}{n+1}$ est en effet une série notoirement divergente.

Donc les hypothèses du théorème **TH4** ne sont pas toutes vérifiées.

c. On reprend les calculs du **a.**:

$$\left|\sum_{n=0}^{p}\int_0^1(-1)^n x^n dx-\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\right)dx\right|=\left|\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\sum_{n=0}^{p}(-1)^n x^n\right)dx\right|=\int_0^1\frac{x^{p+1}dx}{1+x}\le\int_0^1 x^{p+1}dx=\frac{1}{p+2}\to 0\,.$$

Ainsi $\underline{\sum_{n\ge 0}\int_0^1(-1)^n x^n dx \text{ converge}}$ et $\underline{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n x^n dx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\right)dx}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2\,.$

11. Théorème de convergence monotone

La suite S_n est la suite associée à la série $\sum f_n$. Comme les f_n sont par hypothèse continues par morceaux et intégrables sur I, il en est de même de leur somme finie S_n. D'autre part, par hypothèse la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I. Il ne reste donc plus qu'à trouver une fonction positive intégrable φ qui domine toutes les fonctions S_n pour achever la vérification des hypothèses du **TH2**.
Or les fonctions f_n étant positives, on a $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I, 0\le S_n(x)\le \lim S_n(x)=f(x)$. Comme la fonction f est supposée intégrable par hypothèse, elle convient pour jouer le rôle de φ.
Ainsi <u>(S_n) vérifie les hypothèses du théorème **TH2**</u>.
On en déduit immédiatement en écrivant S_n comme une somme partielle et sa limite f comme une série que:

$$\text{la série }\underline{\sum_{n\ge 0}\int_I f_n(x)dx \text{ converge}} \text{ et } \underline{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(x)dx=\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx}$$

12. Application à la physique

a. Pour $t\in\left]0;+\infty\right[$, $e^{-t}\in\left]0;1\right[$. Il en résulte que $t\mapsto\frac{1}{1-e^{-t}}$ est limite simple de la série de fonctions $\sum e^{-nt}$.

Or $f(t)=\frac{t^3}{e^t-1}=\frac{t^3e^{-t}}{1-e^{-t}}$, donc f est limite simple sur $\left]0;+\infty\right[$ de la série de fonctions $\sum t^3e^{-(n+1)t}$.

En effectuant le changement de variable $u=(n+1)t$ on déduit de la question **1.a.** que chaque fonction (continue) $t\mapsto t^3e^{-(n+1)t}$ est intégrable sur $\left]0;+\infty\right[$. De plus, ces fonctions sont positives sur $\left]0;+\infty\right[$.
Par passage à la limite f est aussi positive sur $\left]0;+\infty\right[$, et <u>f est intégrable sur $]0;+\infty[$</u> car équivalente à t^2 (donc prolongeable par continuité) en 0 et équivalente à t^3e^{-t} en $+\infty$ (voir **1.a.**).
Nous sommes donc en présence des hypothèses du théorème de convergence monotone. On peut en déduire que la série numérique $\sum_{n\ge 0}\int_0^{+\infty}t^3e^{-(n+1)t}dt$ converge vers $\int_0^{+\infty}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{e^t-1}dt$.

Or $\int_0^{+\infty}t^3e^{-(n+1)t}dt\underset{u=(n+1)t}{=}\frac{1}{(n+1)^4}\int_0^{+\infty}u^3e^{-u}du=\frac{\Gamma(4)}{(n+1)^4}$, donc $\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{e^t-1}dt=\Gamma(4)\varsigma(4)=3!.\frac{\pi^4}{90}=\underline{\frac{\pi^4}{15}}$.

b. $$M=\frac{c}{4}\int_0^{+\infty}8\pi hc\frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B\lambda T}}-1}d\lambda\underset{t=\frac{hc}{k_B\lambda T}}{=}\frac{c}{4}(8\pi hc)\frac{\left(-\frac{hc}{k_BT}\right)}{\left(\frac{hc}{k_BT}\right)^5}\int_{+\infty}^{0}\frac{t^3}{e^t-1}dt=\frac{-2\pi k_B^4T^4}{h^3c^2}.\left(-\frac{\pi^4}{15}\right).$$

On a donc bien démontré la loi de Stefan: $\boxed{M=\frac{2\pi^5k_B^4T^4}{15h^3c^2}T^4}$.

13. Généralisation

a. Par un raisonnement identique à celui de la question **12.a.** on trouve $\underline{\forall x>1,\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}dt=\Gamma(x)\varsigma(x)}$.

b. On a donc $\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\Gamma(2)\varsigma(2)=\underline{\frac{\pi^2}{6}}$ et $\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{e^t-1}dt=\Gamma(7)\varsigma(7)=720\varsigma(7)\underset{\mathbf{2.c.}}{\cong}\underline{726{,}011691}$ (à 10^{-3} près).

Fin du corrigé.