

1. Première partie

1. (a) Les coordonnées du point H_0 peuvent par définition du projeté orthogonal s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}x_h &= x_0 + \lambda a \\y_h &= y_0 + \lambda b\end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus ce point appartient à la droite D , d'où

$$a(x_0 + \lambda a) + b(y_0 + \lambda b) + c = 0$$

On tire alors de cette équation la valeur de λ , on obtient :

$$\lambda = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

D'où les coordonnées du point H_0 :

$$\left(x_0 - a \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, y_0 - b \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right)$$

- (b) On sait que $d(M_0, D) = \left\| \overrightarrow{M_0 H_0} \right\|$, d'où

$$\begin{aligned}d(M_0, D) &= \left\| \left(a \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}, b \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right) \right\| \\&= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \|(a, b)\| \\&= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2} \\&= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\begin{cases} D_0 : x = 0 \\ D_{-1} : y = 2 \\ D_1 : y = 0 \end{cases}$$

Un point M de coordonnées (x, y) est donc, d'après la question précédente, équidistant des trois droites si, et seulement si

$$|x| = |y - 2| = |y|$$

En particulier $(y - 2)^2 = y^2$ d'où l'on tire $y = 1$, et donc $x = \pm 1$. Les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ vérifiant bien les conditions précédentes, on a

Les points équidistants des trois droites D_0, D_{-1}, D_1 sont les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(-1, 1)$.

- (b) Soit un point M de coordonnées (x, y) équidistant de toutes les droites (D_t) pour $t \in \mathbb{R}$. Alors ce point est en particulier équidistant des droites D_0, D_{-1}, D_1 . Ainsi d'après la question précédente, le point M est l'un des deux points $(1, 1)$ ou $(-1, 1)$. On a de plus pour tout $t \in \mathbb{R}$ et d'après la question 1b :

$$\begin{aligned} d((1, 1), D_t) &= \frac{|t^2 - 1 - 2t - 2t(t-1)|}{\sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2}} \\ &= \frac{|-1 - t^2|}{\sqrt{(1 + t^2)^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

et

$$d((-1, 1), D_t) = \frac{|1 - 3t^2|}{t^2 + 1}$$

qui n'est pas constant. On a donc démontré :

Il existe un unique point équidistant de toutes les droites $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$, et ce point est le point de coordonnées $(1, 1)$.

3. (a) Le point de coordonnées $(0, 1 - t)$ est un point de la droite D_t de façon immédiate. De plus de l'équation de la droite D_t on obtient que le vecteur $(t^2 - 1, -2t)$ est un vecteur normal, et donc le vecteur $(-2t, 1 - t^2)$ est un vecteur directeur. On en déduit donc le paramétrage suivant de la droite D_t :

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= -2t\lambda \\ y &= 1 - t + \lambda(1 - t^2) \end{cases}$$

- (b) Cherchons une fonction λ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} telle que la courbe :

$$t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= -2t\lambda(t) \\ y(t) &= 1 - t + \lambda(t)(1 - t^2) \end{cases}$$

soit telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $(x'(t), y'(t))$ soit colinéaire au vecteur $(-2t, 1 - t^2)$, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\begin{vmatrix} x'(t) & -2t \\ y'(t) & 1 - t^2 \end{vmatrix} = 0$$

Les règles du calcul différentiel et la linéarité du déterminant par rapport à sa première colonne permet alors d'obtenir l'équation suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -2t \\ -1 & 1 - t^2 \end{vmatrix} + \lambda(t) \begin{vmatrix} -2 & -2t \\ -2t & 1 - t^2 \end{vmatrix} = 0$$

et d'en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lambda(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ qui est bien une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Par définition de la développée, la courbe Γ est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= -2 \frac{-t}{1+t^2} \\ y &= 1 - t + (1 - t^2) \frac{-t}{1+t^2} \\ &= \frac{(1-t)(1+t^2) - t(1-t)(1+t)}{1+t^2} \\ &= \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}$$

soit, comme attendu :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases}$$

4. (a) On reconnaît immédiatement :

la courbe Γ' est le cercle de centre $(1, 1)$ et de rayon 1.

(b) On vérifie que $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ avec les valeurs de x et y trouvées en question 3b. On a en effet pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-1)^2 &= \left(\frac{2t^2 - 1 - t^2}{1+t^2} \right)^2 + \left(\frac{(1-t)^2 - (1+t^2)}{1+t^2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} ((t^2 - 1)^2 + 4t^2) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} (t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} ((t^2 + 1)^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a donc bien $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Ces courbes ne sont pas égales puisque le point $(2, 1) \in \Gamma' \setminus \Gamma$ puisque l'on ne peut pas avoir $\frac{2t^2}{1+t^2} = 2$ (cela implique $2 = 0$). Ainsi :

On a bien $\Gamma \subseteq \Gamma'$ mais $\Gamma \neq \Gamma'$.

(c) Étant donné le sens de rotation des droites D_t que l'on devine grâce aux droites D_{-1}, D_0, D_1 , on obtient que

Les deux courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique.

5. (a) D'après le cours

- Définition : la développée est le lieu des centres de courbure.
- Caractérisation : la développée est l'enveloppe des normales.

(b) Définition (déjà utilisée en 3b) : l'enveloppe d'une famille de droite $(D_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une courbe Γ de classe \mathcal{C}^1 telle que

- $\forall t \in \mathbb{R}, \Gamma(t) \in D_t,$
- $\forall t \in \mathbb{R}, \Gamma'(t)$ est un vecteur directeur de $D_t.$

(c) Ce sont les suivantes, avec, si Γ est un arc régulier, $T = \frac{\Gamma'}{\|\Gamma'\|}$ le vecteur normal et N le vecteur tangent (image par rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ du vecteur T) :

- $\frac{dT}{ds} = \gamma N,$
- $\frac{dN}{ds} = -\gamma T.$

6. (a) On a par un calcul direct et les définitions données en 5c :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi],$$

- $\vec{T}(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)),$
- $\vec{N}(\theta) = (-\cos(\theta), \sin(\theta)),$
- $s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \theta$ (les valeurs de x, y sont celles de la question 4).
- L'origine du repère de Frenet est, par définition le point $M(\theta).$

(b) On a par la définition donnée dans l'énoncé, qu'un paramétrage de la courbe Λ_k est donné par

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \begin{cases} x = 1 + \cos(\theta) - (k - \theta) \sin(\theta) \\ y = 1 + \sin(\theta) + (k - \theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

(c) Les fonctions x, y précédentes sont des fonctions dérivables de la variable θ , et on a

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \begin{cases} x'(\theta) = (\theta - k) \cos(\theta) \\ y'(\theta) = (\theta - k) \sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi le vecteur $(x', y')(\theta)$ est nul si, et seulement si, $\theta = k$ puisque les fonctions \cos et \sin ne s'annulent jamais en même temps. Ainsi :

La courbe Λ_k admet un unique point stationnaire, le point de coordonnées $(1 + \cos(k), 1 + \sin(k))$, situé sur $\Gamma'.$

(d) On reprend la même méthode que celle utilisée en question 3b, en utilisant le vecteur $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ comme vecteur normal : on cherche une fonction λ de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0, 2\pi]$ telle que l'on ait :

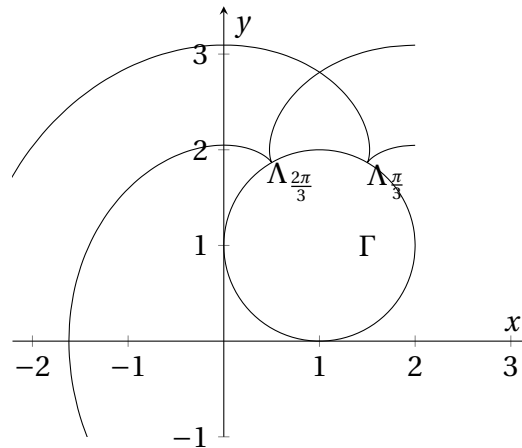
$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \begin{vmatrix} x'(\theta) & -\sin(\theta) \\ y'(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} + \lambda(\theta) \begin{vmatrix} -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne alors immédiatement $\lambda(\theta) = \theta - k$ qui est bien de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0, 2\pi]$. On en déduit que :

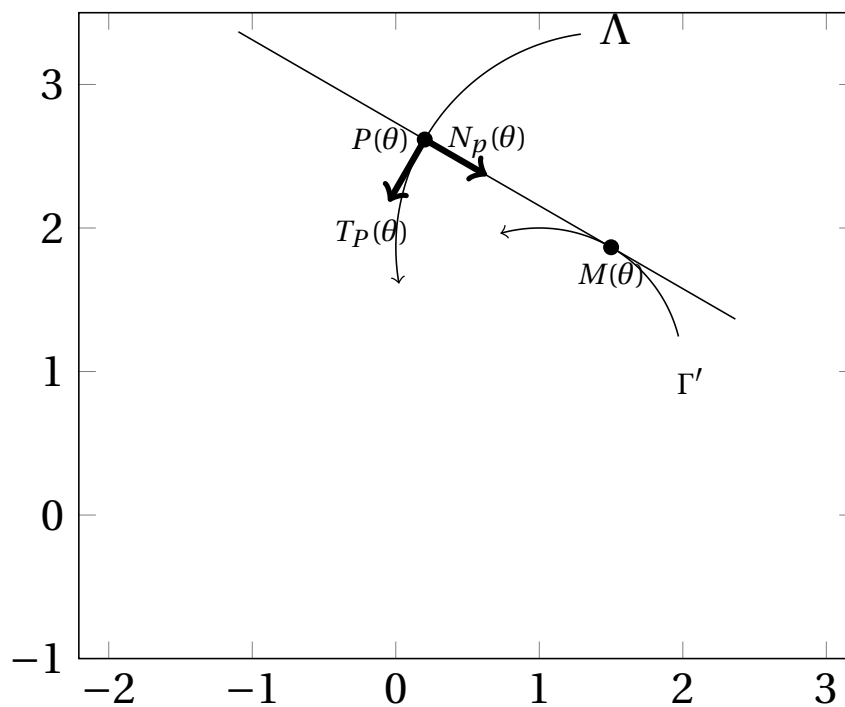
la développée de la courbe Λ_k est la courbe $\Gamma.$

Remarque.

Le graphique suivant donne quelques-unes des courbes Λ_k , où l'on identifie bien le point stationnaire comme étant le point de $M(k)$:



7. (a) Nous nous trouvons donc dans une situation du type représentée ci-après, le centre de courbure $M(\theta)$ de la courbe Λ étant bien situé "dans la concavité" de la courbe Λ , et le sens du vecteur tangent $T_P(\theta)$ étant contraint par le sens de parcours de la courbe Γ' et le vecteur $N_P(\theta)$ étant obtenu par rotation du vecteur $T_P(\theta)$ d'angle $+\frac{\pi}{2}$.



- (b) Par définition de la développée, la droite $P(\theta) + \text{Vect}(\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)})$ est la tangente à la courbe Γ' au point $M(\theta)$, ainsi le vecteur $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)}$ est nécessairement colinéaire au vecteur $\vec{T}(\theta)$:
il existe $\lambda(\theta)$ tel que $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = \lambda(\theta) \vec{T}(\theta)$.

(c) On utilise les règles de calculs des dérivées de fonctions à valeurs vectorielles :

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta} &= \frac{d(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP})}{d\theta} \\ &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} + \frac{d\overrightarrow{MP}}{d\theta} \\ &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} + \frac{d(\lambda \overrightarrow{T})}{d\theta} \\ &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} \overrightarrow{T} + \lambda \frac{d\overrightarrow{T}}{d\theta} \\ &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} \overrightarrow{T} + \lambda \gamma \frac{ds}{d\theta} \overrightarrow{N} \quad \text{d'après la première formule de Frénet} \\ &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} \overrightarrow{T} + \lambda \gamma \frac{ds}{d\theta} \overrightarrow{N} \end{aligned}$$

On a ensuite par définition du vecteur tangent et de l'abscisse curviligne :

$$\begin{cases} \frac{ds_P}{d\theta} \overrightarrow{T}_P = \frac{d\overrightarrow{OP}}{d\theta} \\ \frac{ds}{d\theta} \overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \end{cases}$$

d'où l'égalité

$$\frac{ds_P}{d\theta} \overrightarrow{T}_P = \frac{ds}{d\theta} \overrightarrow{T} + \frac{d\lambda}{d\theta} \overrightarrow{T} + \lambda \gamma \frac{ds}{d\theta} \overrightarrow{N}$$

(d) En projetant l'égalité précédente sur le vecteur \overrightarrow{T} , étant donné que les vecteurs \overrightarrow{N} et \overrightarrow{T}_P sont orthogonaux à \overrightarrow{T} (le premier par définition, le second puisque le vecteur $\overrightarrow{M(\theta)P(\theta)}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{N}_P(\theta)$ par définition mais aussi à \overrightarrow{T} d'après la question 7b, on obtient donc

$$\frac{ds}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\theta} = 0$$

Étant donné que s est la fonction identité de la variable θ d'après la question 6a, on obtient $\frac{d\lambda}{d\theta} = -1$, autrement dit :

$$\text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ telle que } \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \lambda(\theta) = k - \theta.$$

(e) On vient donc de démontrer le résultat annoncé, puisqu'une représentation paramétrique de la courbe Λ est de la forme Λ_k étant donné qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \overrightarrow{M(\theta)P(\theta)} = (k - s(\theta)) \overrightarrow{T}(\theta)$:

Toute courbe dont la développée est incluse dans la courbe Γ' est une courbe Λ_k .

2. Deuxième partie

1. On applique la méthode du pivot de Gauss avec matrice témoin :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) &\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & 1 \end{array} \right) &\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) &\begin{cases} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{cases} \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) &\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. (a) On a par calcul matriciel :

$$N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} N^2 - 3N + 2I &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$N^2 - 3N + 2I = 0$$

(b) On a donc l'égalité matricielle

$$N \left(\frac{1}{2} (3I - N) \right) = I$$

ce qui prouve que N est inversible, d'inverse $\frac{1}{2} (3I - N)$. De plus

$$\frac{1}{2} (3I - N) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

La matrice N est inversible, et

$$N^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) i. On a d'après le cours la formule :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

ii. On a d'une part $\det(B) = 0$ car la matrice B admet deux colonnes identiques. Et d'autre part en développant ce déterminant par rapport à la j -ème colonne de la matrice B , on obtient

$$\det(B) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} b_{i,j} \det(B_{i,j})$$

or la j -ème colonne de la matrice B est la j' -ème de la matrice A d'où

$$\det(B) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j'} \det(B_{i,j})$$

et enfin, étant donné que les matrices A et B ne diffèrent que par leur j -ème colonne, la sous-matrice $B_{i,j}$ de la matrice B correspond nécessairement à la sous-matrice $A_{i,j}$ de la matrice A . D'où :

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j'} \det(A_{i,j}) = \det(B) = 0$$

(b) i. Par définition du calcul matriciel, on a

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}$$

ii. Calculons tous les coefficients de la matrice C . On a pour $i \neq j$:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,j} \det(A_{k,i}) \\ &= 0 \quad \text{d'après 3(a)ii} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{i,i} &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{k,j} \det(A_{k,j}) \\ &= \det(A) \quad \text{d'après 3(a)i} \end{aligned}$$

d'où :

$$C = BA = \det(A)I$$

iii. Si A est inversible, alors $\det(A)$ est non nul et on a alors l'égalité matricielle :

$$\frac{1}{\det(A)}BA = I$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}B$$

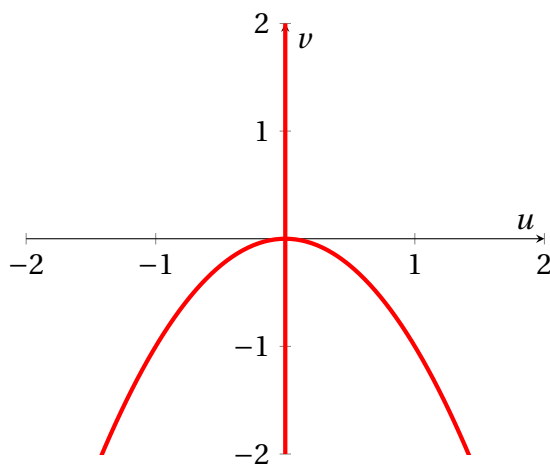
4. (a) On a pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \det(A(u, v)) &= \begin{vmatrix} uv - u & uv & u^2 - v \\ v - 1 & v & 2u \\ u & u & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u^3 - u & u^3 & u^2 - v \\ 2u^2 + v - 1 & 2u^2 + v & 2u \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 + uC_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 + uC_3 \end{cases} \\ &= - \begin{vmatrix} u^3 - u & u^3 \\ 2u^2 + v - 1 & 2u^2 + v \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la troisième ligne} \\ &= u(u^2(2u^2 + v - 1) - (u^2 - 1)(2u^2 + v)) \\ &= u(-u^2 + (2u^2 + v)(u^2 - u^2 + 1)) \\ &= u(u^2 + v) \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble D est l'ensemble

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u \neq 0 \quad \text{et} \quad u^2 + v \neq 0\}$$

c'est donc le complémentaire de la droite d'équation $u = 0$ et de la parabole d'équation $u^2 = -v$, que l'on représente sur le graphique suivant :



(b) On utilise la formule donnée en question 3(b)iii, on trouve alors après le calcul des 9 déterminants 2×2 et sans oublier les signes :

$$A(u, v)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-v^2 - 2u^2}{u(u^2 + v)} & \frac{u^2}{u^2 + v} & \frac{v}{u} \\ \frac{2u^2 + v - 1}{u(u^2 + v)} & \frac{1 - u^2}{u^2 + v} & \frac{1 - v}{u} \\ \frac{-1}{u^2 + v} & \frac{u}{u^2 + v} & 0 \end{pmatrix}$$

3. Troisième partie

1. (a) Posons $\varphi(u, v) = (x, y, z)$ avec les fonctions x, y, z données dans l'énoncé. Alors la fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 car ses trois fonctions coordonnées sont des polynômes, et de plus pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 2u \\ v \\ 2u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v - 2u^2 = 0 \\ -2u = 0 \\ 2u^2 = 0 \end{cases}$$

soit $u = v = 0$.

La surface S admet un unique point non régulier : le point $(0, 0)$ de paramètre $u = v = 0$.

- (b) Si $(u, v) \neq (0, 0)$, alors d'après le cours une équation du plan tangent à la surface S au point de paramètre (u, v) est donnée par

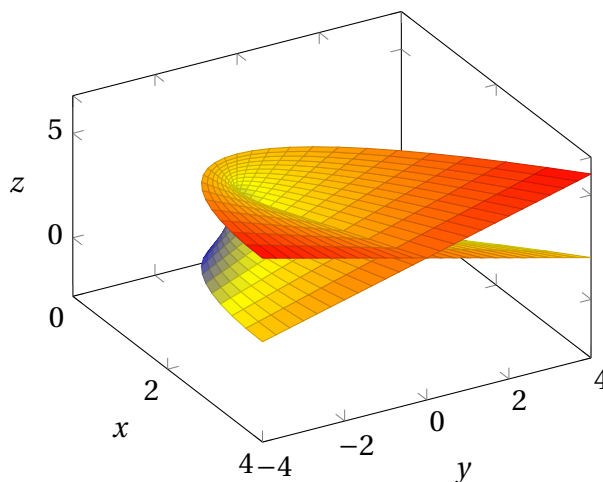
$$P_{u,v} : (v - 2u^2)(x - u^2) - 2u(y - uv) + 2u^2(z - u^2 - v) = 0$$

soit

$$P_{u,v} : (v - 2u^2)x - 2uy + 2u^2z = u^2v$$

Remarque.

On a représenté une portion de cette surface sur la figure suivante :



2. (a) On note encore $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ le paramétrage de la surface Σ . La surface Σ convient si, et seulement si en tout point (u, v) les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} M(u, v) \in P(u, v) \\ \text{les vecteurs } \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \text{ dirigent le plan } P_{u,v} \end{cases} \quad (1)$$

Or Eq₁ traduit exactement la première équation, et les équations Eq₂ et Eq₃ traduisent exactement le fait que les deux vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ sont orthogonaux au vecteur $\begin{pmatrix} a(u, v) \\ b(u, v) \\ c(u, v) \end{pmatrix}$, un vecteur normal du plan tangent : ces deux conditions sont équivalentes à la deuxième équation précédente,

on a donc bien l'équivalence demandée.

- (b) On a, toutes les fonctions étant suffisamment régulières pour les calculs que nous faisons, en dérivant Eq₁ par rapport à u puis v et en abrégant les écritures :

$$\left(\frac{\partial a}{\partial u} x + \frac{\partial b}{\partial u} y + \frac{\partial c}{\partial u} z \right) + \left(a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial y}{\partial u} + c \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \frac{\partial d}{\partial u} \quad (\text{Eq}_{1u})$$

$$\left(\frac{\partial a}{\partial v} x + \frac{\partial b}{\partial v} y + \frac{\partial c}{\partial v} z \right) + \left(a \frac{\partial x}{\partial v} + b \frac{\partial y}{\partial v} + c \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial d}{\partial v} \quad (\text{Eq}_{1v})$$

(2)

Ainsi :

$$\begin{aligned} (S_1) &\Rightarrow \text{Eq}_1, \text{Eq}_2, \text{Eq}_3, \text{Eq}_{1u}, \text{Eq}_{1v} \\ &\Rightarrow \text{Eq}_1, \text{Eq}_2, \text{Eq}_3, \text{Eq}_{1u} - \text{Eq}_2, \text{Eq}_{1v} - \text{Eq}_3 \\ &\Rightarrow \underbrace{\text{Eq}_1, \text{Eq}_4 = \text{Eq}_{1u} - \text{Eq}_2, \text{Eq}_5 = \text{Eq}_{1v} - \text{Eq}_3}_{(S_2)} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (S_2) &\Rightarrow \text{Eq}_1, \text{Eq}_4, \text{Eq}_5 \\ &\Rightarrow \text{Eq}_1, \text{Eq}_4, \text{Eq}_5, \text{Eq}_{1u}, \text{Eq}_{1v} \\ &\Rightarrow \underbrace{\text{Eq}_1, -\text{Eq}_4 + \text{Eq}_{1u}, -\text{Eq}_5 + \text{Eq}_{1v}}_{(S_1)} \end{aligned}$$

d'où

$$(S_1) \Leftrightarrow (S_2)$$

3. (a) La matrice associée au système (S₃) est la matrice

$$\begin{pmatrix} 2u^2 + v & 1 - (2u^2 + v) & u \\ 4u & -4u & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut, après l'opération $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$,

$$\begin{vmatrix} 2u^2 + v & 1 & u \\ 4u & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4u & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ = 1 \neq 0$$

donc

le système est inversible.

(b) Utilisons la méthode du pivot de Gauss pour résoudre le système augmenté :

$$\begin{pmatrix} 2u^2 + v & 1 - (2u^2 + v) & u & | & uv + u^3 \\ 4u & -4u & 1 & | & v + 3u^2 \\ 1 & -1 & 0 & | & u \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & | & -u^3 \\ 0 & 0 & 1 & | & v - u^2 \\ 1 & -1 & u & | & u \end{pmatrix} \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 4uL_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - (2u^2 + v)L_3 \end{cases} \\ \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & | & -u^3 \\ 0 & 0 & 1 & | & v - u^2 \\ 1 & 0 & u & | & u - u^3 \end{pmatrix} \begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases} \\ \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & -uv \\ 0 & 0 & 1 & | & v - u^2 \\ 1 & 0 & 0 & | & u(1 - v) \end{pmatrix} \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - uL_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - uL_2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} X &= u(1 - v) \\ Y &= -uv \\ Z &= v - u^2 \end{aligned}$$

(c) On note $\varphi(u, v) = (X, Y, Z)$ avec X, Y, Z les valeurs trouvées à la question précédente. On a alors que φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 car ses fonctions de coordonnées sont des polynômes, et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - v \\ -v \\ -2u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -u \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -v - 2u^2 \\ 2u^2 + v - 1 \\ -u \end{pmatrix}$$

ce vecteur est nul si, et seulement si $u = 0, v + 2u^2 = 0, 2u^2 + v - 1 = 0$, ce qui implique en particulier $-1 = 0$, ce qui est impossible. Ainsi

tout les points du paramétrage obtenu sont réguliers.

4. Le système associé est alors

$$A(u, v) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $A(u, v)$ la matrice de la partie II. On a donc, pour $(u, v) \in D$ l'ensemble défini dans la partie II,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A(u, v)^{-1} \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit, en utilisant le résultat 4b de la partie II:

$$\forall (u, v) \in D, \begin{cases} X = \frac{-v^3 - 2u^2v + v(u^2 + v)}{u(u^2 + v)} \\ \quad = -\frac{uv}{u^2 + v} \\ Y = \frac{(2u^2 + v - 1)v + (1 - v)(u^2 + v)}{u(u^2 + v)} \\ \quad = \frac{u(v + 1)}{u^2 + v} \\ Z = -\frac{v}{u^2 + v} \end{cases}$$

$$\forall (u, v) \in D, \begin{cases} X = -\frac{uv}{u^2 + v} \\ Y = \frac{u(v + 1)}{u^2 + v} \\ Z = -\frac{v}{u^2 + v} \end{cases}$$

Remarque.

| Le résultat est encore valable si $u = 0$.