

Olivier HALGAND

olivier.halgand@ac-lyon.fr

PREMIER PROBLÈME

PARTIE I

1) La fonction  $\ln$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :  $1+x > 0 \Leftrightarrow x > -1$ . Donc, le dénominateur devant être non nul :

$$D = ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[.$$

2) On sait que :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On en déduit que :

$$f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x),$$

et ainsi

on peut prolonger  $f$  par continuité en 0 en posant :  $f(0) = 1$  ; alors  $D' = ]-1, +\infty[.$

3) Puisque  $f$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, alors :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

De plus,  $f$  est dérivable sur  $D$  et :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot x - \ln(1+x)}{x^2} \quad \text{soit :} \quad f'(x) = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

Or, on a :

$$(1+x)\ln(1+x) \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \text{donc :} \quad \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + o(1).$$

On en déduit donc que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$ , ce qui prouve que  $f'$  est continue en 0. De plus,  $f$  est continue sur  $D$  par composée, produit, somme et quotient de fonctions continues, donc :

$$f \in \mathcal{C}^1(]-1, +\infty[, \mathbb{R}).$$

4) Sur  $D$ , le dénominateur de  $f'$  est strictement positif. Considérons la fonction  $k : x \in D' \mapsto x - (1+x)\ln(1+x)$ . La fonction  $k$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $D'$  et :

$$\forall x \in D', \quad k'(x) = 1 - \ln(1+x) - (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} = -\ln(1+x).$$

Or, on a les limites :  $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$  et, par croissances comparées :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

On obtient donc le tableau :

$x$	-1	0	$+\infty$
$k'(x)$	+	0	-
$k$			
$k(x)$	-		-
$f$	$+\infty$	1	0

5) a) Puisque  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \rho = 0$ ,

lorsque  $\theta \rightarrow +\infty$ ,  $\Gamma$  forme une spirale autour de l'origine.

Pour  $\theta = 0$ , on a :  $\rho = f(0) = 1$  et  $\rho' = f'(0) = -\frac{1}{2}$ . En notant  $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} = \vec{i}$ ,  $\vec{u}' = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{j}$  et  $\overrightarrow{OM} = f(\theta) \vec{u} = \vec{i}$ , on a alors :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = f'(\theta) \vec{u} + f(\theta) \vec{v} = -\frac{1}{2} \vec{i} + \vec{j}.$$

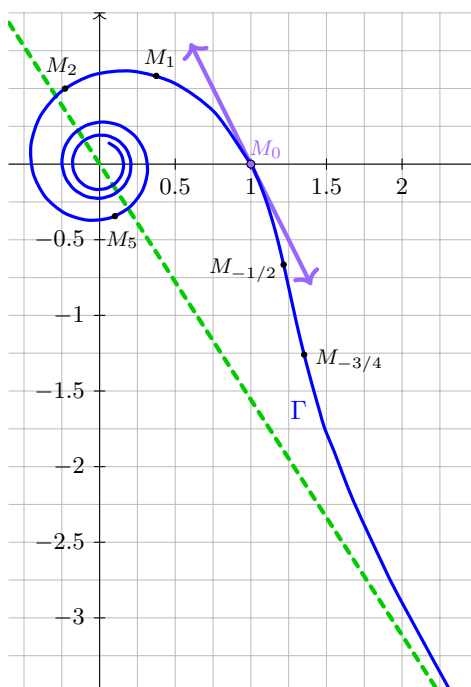
Ainsi, en notant  $V = \left( \vec{u}, \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right) [2\pi]$ , on obtient :  $\tan V = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ .

La tangente au point de paramètre  $\theta = 0$  a pour coefficient directeur : -2.

b) On a :  $Y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta + 1) = \frac{\ln(1 + \theta)}{\theta} \sin(1 + \theta)$ . En posant  $\alpha = 1 + \theta \xrightarrow{\theta \rightarrow -1} 0$ , on a donc, par croissances comparées :  $Y(\alpha - 1) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$ , et donc :

$$\lim_{\theta \rightarrow -1} Y(\theta) = 0.$$

c) On obtient donc la courbe suivante :



**PARTIE II**

6) La fonction  $f$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$ , elle est intégrable sur ce segment, et donc :

l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  est bien définie.

7) Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a, en reconnaissant une somme géométrique de raison  $-t \neq 1$  :

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)},$$

soit :

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \frac{1 - (-1)^nt^n}{1 + t}.$$

8) On en déduit donc, pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$\int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1}) dt = \int_0^x \frac{1 - (-t)^n}{1 + t} dt,$$

soit, par linéarité :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{dt}{1+t} - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt,$$

ce qui donne donc :

$$\forall x \in [0, 1], \quad P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt.$$

9) On en déduit donc, pour tout  $(n, x) \in \mathbb{N} \times [0, 1]$  :

$$|R_n(x)| = \left| (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt,$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad |R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

10) Pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$Q'_n(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n},$$

donc :

$$\forall x \in ]0, 1], \quad Q'_n(x) = \frac{P_n(x)}{x}.$$

11) On sait que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_n(x)}{x} = 1$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} g_n(x) = 0$  ce qui permet de prolonger  $g_n$  par continuité en 0, en posant  $g_n(0) = 0$ , de sorte que  $g_n$  est continue sur  $[0, 1]$ . L'intégrale  $\int_0^1 |g_n(x)| dx$  est bien définie.

De plus, d'une part :

$$\int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 (Q'_n(x) - f(x)) dx = Q_n(1) - Q_n(0) - L = Q_n(1) - L,$$

et, d'autre part on a posé, pour tout  $x \in [0, 1]$  :  $R_n(x) = \ln(1+x) - P_n(x)$  donc, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  :

$$\int_\varepsilon^1 |g_n(x)| dx = \int_\varepsilon^1 \frac{|R_n(x)|}{x} dx \leq \int_\varepsilon^1 \frac{x^n}{n+1} dx \leq \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Or, la fonction :  $\varepsilon \mapsto \int_{\varepsilon}^1 |g_n(x)| dx$  est continue, décroissante sur  $[0, 1]$  et majorée par  $\frac{1}{(n+1)^2}$ , donc :

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi, on a bien l'encadrement :

$$|Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)| dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$ , on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(1) = L.$$

12) On a :  $|Q_n(1) - L| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$  et

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow (n+1)^2 \geq 10^4 \Leftrightarrow n+1 \geq 100 \Leftrightarrow n \geq 99.$$

Donc

$$Q_N(1) \text{ approxime } L \text{ à } 10^{-4} \text{ près pour } N \geq 99.$$

### PARTIE III

13) Les fonctions :  $x \mapsto \ln(1+x)$  et :  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sont indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc, par produit

$$f \text{ est indéfiniment dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.$$

14) On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) &= \frac{-\ln(1+x)x^2(1+x) - (x - (1+x)\ln(1+x))(2x+3x^2)}{x^4(1+x)^2} \\ &= \frac{(-x^2+2x+3x^2)(1+x)\ln(1+x) - x(2x+3x^2)}{x^4(1+x)^2}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{2(1+x)^2 \ln(1+x) - x(2+3x)}{x^3(1+x)^2} = 2 \frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{2+3x}{x^2(1+x)^2}.$$

15) On raisonne par récurrence :

- **Initialisation** : la propriété est vraie pour  $n=1$  avec :  $T_1 = 1$  et  $a_1 = -1$ .
- **Hérédité** : on suppose la propriété vraie pour un entier  $n$  donné. Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{T_n'(x)(1+x)^n x^n - T_n(x)(n(1+x)^{n-1} x^n + n(1+x)^n x^{n-1})}{(1+x)^{2n} x^{2n}} \\ &\quad + a_n \frac{\frac{1}{1+x} x^{n+1} - \ln(1+x)(n+1)x^n}{x^{2n+2}} \\ &= \frac{T_n'(x)(1+x)x - T_n(x)(nx + n(1+x))}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} + a_n \left( \frac{1}{(1+x)x^{n+1}} - (n+1) \frac{\ln(x+1)}{x^{n+2}} \right) \\ &= \frac{T_n'(x)(1+x)x - T_n(x)(nx + n(1+x)) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} - a_n(n+1) \frac{\ln(x+1)}{x^{n+2}}. \end{aligned}$$

Puisque l'ensemble des polynômes est un espace vectoriel, on en déduit que la propriété est héréditaire.

- **Conclusion** : on a donc démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists T_n \in \mathbb{R}[X], \exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$

**16)** On utilise la récurrence précédente pour démontrer que les polynômes  $T_n$  sont à coefficients entiers et que les  $a_n$  sont entiers.

- **Initialisation** : le polynôme  $T_1 = 1$  est à coefficients entiers et  $a_1 = -1 \in \mathbb{Z}$ , donc la propriété est initialisée.

- **Hérédité** : supposons qu'elle soit vraie pour un entier  $n$  donné, alors :

—  $T'_n$  et  $X(1+X)$  sont à coefficients entiers, donc  $X(1+X)T'_n$  aussi ;

—  $n(1+2X)$  et  $T_n$  aussi, donc  $n(1+2X)T_n$  aussi ;

—  $a_n$  est entier et, en utilisant la formule du binôme,  $(1+X)^n$  est à coefficients entiers, donc  $a_n(1+X)^n$  aussi.

Finalement,  $T_n n + 1 = X(1+X)T'_n - n(1+2X)T_n - a_n(1+X)^n$  est à coefficients entiers.

- **Conclusion** : on a donc démontré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n \in \mathbb{Z}[X]} \quad \text{et} \quad a_n \in \mathbb{Z}.$$

**17)** Par définition, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = u(x)v(x)$  où  $u : x \mapsto \ln(1+x)$  et  $v : x \mapsto \frac{1}{x} = x^{-1}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$u'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad u''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad u'''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad u^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4} \dots$$

$$v'(x) = -x^{-2}, \quad v''(x) = 2x^{-3}, \quad v'''(x) = -6x^{-4}, \dots$$

et, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k} \quad \text{et} \quad v^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-k-1}.$$

D'après la formule de Leibniz, on a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\ &= u^{(0)}(x) v^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k} \cdot \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}} \\ &= \ln(1+x) \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1+x)^k x^{n-k+1}}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+x)^n x^n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (1+x)^{n-k} x^{k-1},}$$

et donc :

$$\boxed{T_n = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (1+X)^{n-k} X^{k-1}} \quad \text{et} \quad a_n = (-1)^n n!.$$

En particulier pour  $n = 2$  on obtient :

$$T_2 = (-1)^3 2! \left( \frac{1}{1} (1+X)^1 X^0 + \frac{1}{2} (1+X)^0 X^1 \right) = -2 \left( 1 + X + \frac{X}{2} \right),$$

donc :

$$\boxed{T_2 = -3X - 2.}$$

## SECOND PROBLÈME

### PARTIE I

1) La matrice  $A$  étant symétrique, on a  ${}^tA = A$  donc, de manière évidente :

$A$  vérifie (1).

De manière similaire,  $C$  est antisymétrique, donc  ${}^tC = -C$  et donc :

$C$  vérifie (1).

2) Le calcul donne :  $A^2 = I$ . On en déduit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ est pair} \\ A & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Or,  $A$  et  $I$  vérifient (1) donc :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n$  vérifie (1).

3) On a vu que  $A^2 = I$  donc :

$A$  est inversible et  $a^{-1} = A$ .

4) On a :

$$u(\vec{i}) = \vec{j} \quad \text{et} \quad u(\vec{j}) = \vec{i}.$$

Puisque  $A^2 = I$  cela signifie que  $u^2 = Id$  et donc

$u$  est une symétrie.

On a évidemment :  $u(\vec{i} + \vec{j}) = u(\vec{i}) + u(\vec{j}) = \vec{j} + \vec{i}$ , et donc :  $\vec{i} + \vec{j}$  est invariant par  $u$ . L'ensemble des vecteurs invariants par une symétrie étant un sous-espace vectoriel, et puisque  $u \neq Id$ , on en déduit que :

l'ensemble des vecteurs invariants par  $u$  est  $Vect(\vec{i} + \vec{j})$ .

5) La matrice  $U$  est symétrique donc

$U$  vérifie (1).

• **Initialisation** : on calcule :  $U^1 = U$  et  $U^2 = 2U$  : la propriété est donc initialisée.

• **Hérédité** : on suppose que  $U^n = 2^{n-1}U$  pour un  $n \in \mathbb{N}^*$  donné. Alors :

$$U^{n+1} = U.U^n = U.2^{n-1}U = 2^{n-1}U^2 = 2^{n-1}.2U = 2^nU,$$

donc la propriété est héréditaire.

• **Conclusion** : on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U^n = 2^{n-1}U.$$

On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U^n$  est symétrique donc :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U^n$  vérifie (1).

6) On a :  $A + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  ${}^t(A + C) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . D'où :

$$(A + C).{}^t(A + C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^t(A + C).(A + C).$$

On a :  $(A, C) \in (E_2)^2$  mais  $(A + C) \notin E_2$ , c'est-à-dire que  $E_2$  n'est pas stable par addition. Il s'ensuit que

$E_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

7) Pour  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  alors  ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  et donc :

$$M \cdot {}^tM = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tM \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

On en tire :

$$M \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = c^2 \\ ac + bd = ab + cd \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - c^2 = 0 \\ ac - ab + bd - cd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)(b-c) = 0 \\ (d-a)(b-c) = 0 \end{cases}.$$

On distingue donc deux cas :

- soit  $b = c$  et alors  $a$  et  $d$  sont quelconques ;
- soit  $b = -c$  et alors  $a = d$ .

On en déduit donc que

$M$  appartient à  $E_2$  si, et seulement si :  $M$  est de l'une des deux formes  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

8) Tout élément de  $E_2$  appartient donc soit à :

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} ; (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (a, b, d) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

soit à :

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Donc :

$$E_2 = F_1 \cup F_2 \text{ avec } F_1 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } F_2 = \text{Vect}(I, C).$$

9) On a vu que  $U \in E_2$  et  $C \in E_2$ . Or :  $UC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  n'est pas de l'une des deux formes obtenues en **I.7.** donc :  $UC \notin E_2$ . Donc :

$E_2$  n'est pas stable par produit.

**PARTIE II**

10) On peut écrire, d'après la définition de  $h$  :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11) On en déduit que :

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc :

$$S \cdot {}^tS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^tS \cdot S$$

et on donc peut écrire, puisque  $S$  et  ${}^tS$  commutent :

$$S^2 \cdot {}^t(S^2) = S \cdot S \cdot {}^tS \cdot {}^tS = {}^tS \cdot {}^tS \cdot S \cdot S = {}^t(S^2) \cdot S^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{S \text{ et } S^2 \text{ vérifient (1).}}$$

**12)** Soient trois réels  $a, b$  et  $c$ , et on pose :  $R = aI_3 + bS + cS^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{pmatrix}$ . Alors :

$$R \cdot {}^tR = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & ab + bc - ca & -ab - bc + ca \\ ab + bc - ca & a^2 + b^2 + c^2 & ab + bc - ca \\ -ab - bc + ca & ab + bc - ca & a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} = {}^tR \cdot R,$$

d'où :

$$\boxed{\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad R = aI_3 + bS + cS^2 \in E_3.}$$

**13)** On en déduit que :

$$\boxed{F = \text{Vect}(I_3, S, S^2) \subset E_3.}$$

**14)** Il suffit de vérifier que les vecteurs d'une base de  $F$  sont stables par multiplication :

$$I_3^2 = I_3 \in F, \quad I_3 \cdot S = S \in F, \quad I_3 \cdot S^2 = S^2 \in F, \quad S \cdot I_3 = S \in F, \quad S \cdot S = S^2 \in F, \quad S \cdot S^2 = S^3 = -I_3 \in F,$$

$$\text{et} \quad S^2 \cdot I_3 = S^2 \in F, \quad S^2 \cdot S = S^3 = -I_3 \in F, \quad S^2 \cdot S^2 = -S \in F.$$

Donc, par bilinéarité du produit matriciel, on peut conclure :

$$\boxed{\forall (M, N) \in F^2, \quad M \cdot N \in F.}$$

### PARTIE III

**15)** On calcule :

$$B \cdot {}^tB = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1+a & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tB \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\boxed{B \in E_4 \Leftrightarrow a = -1.}$$

**16)** On a les équivalences :

$$(x, y, z, t) \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -x \quad \quad \quad + t = 0 \\ x \quad \quad \quad - t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t = 0 \\ y = z \end{cases},$$

et donc :

une base de  $\text{Ker}(u)$  est :  $\left( (0, 1, 1, 0) \right)$ .

On a bien sûr :

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}\left(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3), u(\vec{e}_4)\right) = \text{Vect}\left((1, -1, 1, 1), (-1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, -1), (1, 1, -1, 1)\right).$$

Or, d'après le théorème du rang :

$$\dim \text{Im}(u) + \dim \text{Ker}(u) = \dim(\mathbb{R}^4) \quad \text{d'où} : \quad \dim \text{Im}(u) = 3.$$

On voit clairement que  $u(\vec{e}_3) = -u(\vec{e}_2)$  et donc

une base de  $\text{Im}(u)$  est :  $\left( (1, -1, 1, 1), (-1, 0, 0, 1), (1, 1, -1, 1) \right)$ .

17) On calcule, par linéarité (ou matriciellement)

$$u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4) = -2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4).$$

On remarque que

$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $-2$ .

18) On a aussi :

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que

$\vec{e}_1 + \vec{e}_4$  et  $\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$  sont des vecteurs propres associés à la valeur propre  $2$ .

19) On a donc, d'après ce qui précède :

$$\text{Mat}_C(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $P$  est la matrice de passage de la base  $B''$  à la base  $C$ , c'est-à-dire :

$$\text{avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \Delta = \text{Mat}_C(u) \quad \text{on a} : B = P\Delta P^{-1}.$$

20) Par une récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = P\Delta^n P^{-1}.$$

$$\text{Or, on a} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad \text{et} : P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (-2)^n + 2^{n+1} + 2^n & (-2)^n - 2^n & -(-2)^n + 2^n & -(-2)^n + 2^{n+1} - 2^n \\ (-2)^n - 2^n & (-2)^n + 2^n & -(-2)^n - 2^n & -(-2)^n + 2^n \\ -(-2)^n + 2^n & -(-2)^n - 2^n & (-2)^n + 2^n & (-2)^n - 2^n \\ -(-2)^n + 2^{n+1} - 2^n & -(-2)^n + 2^n & (-2)^n - 2^n & (-2)^n + 2^{n+1} + 2^n \end{pmatrix}.$$

On obtient donc, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$B^{2p} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^{2p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 2^{2p} & -2 \cdot 2^{2p} & 0 \\ 0 & -2 \cdot 2^{2p} & 2 \cdot 2^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \cdot 2^{2p} \end{pmatrix} = \frac{2^{2p}}{4} B^2 = 2^{2p-2} B^2 ;$$
$$B^{2p+1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{2p+1} & -2 \cdot 2^{2p+1} & 2 \cdot 2^{2p+1} & 2 \cdot 2^{2p+1} \\ -2 \cdot 2^{2p+1} & 0 & 0 & 2 \cdot 2^{2p+1} \\ 2 \cdot 2^{2p+1} & 0 & 0 & -2 \cdot 2^{2p+1} \\ 2 \cdot 2^{2p+1} & 2 \cdot 2^{2p+1} & -2 \cdot 2^{2p+1} & 2 \cdot 2^{2p+1} \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot 2^{2p+1}}{4} B = 2^{2p} B.$$