

CONCOURS MINES-PONTS 2022

CORRIGÉ MATHÉMATIQUES I - MP

m.laamoum@gmail.com

Formule asymptotique de Hardy et Ramanujan

A. Fonctions L et P

1 ▷ La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ est de rayon de convergence 1 (règle de D'Alembert) donc elle converge sur D .

Si $z \in]-1, 1[$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$.

2 ▷ Soit $z \in D$ et $t \in [0, 1]$, $|tz| < 1$ donc $L(tz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$, la série entière réelle $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} x^n$ est de rayon de convergence strictement supérieur à 1 donc elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n x^{n-1} = \frac{z}{1-xz}$$

donc

$$\frac{d}{dt} L(tz) = \frac{z}{1-tz}$$

Soit $g : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$, elle est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et

$$g'(t) = -ze^{L(tz)} + (1-tz)e^{L(tz)} \frac{d}{dt} L(tz) = 0$$

donc g est constante sur $[0, 1]$, comme $g(0) = 1$ alors $g(t) = 1$ et

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

3 ▷ Soit z dans D on a

$$\begin{aligned} |L(z)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|) \end{aligned}$$

Par suite $|L(z^n)| \leq -\ln(1-|z|^n)$, on a $-\ln(1-|z|^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|^n$ donc la série $-\ln(1-|z|^n)$ converge, on en déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} L(z^n)$.

B. Développement de P en série entière

4 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On a $P_{n,N} \subset [1, n]^N$ donc $P_{n,N}$ est fini.

Si $(a_1, \dots, a_N) \in P_{n,N}$ alors $(a_1, \dots, a_N, 0) \in P_{n,N+1}$, donc $\text{Card}(P_{n,N}) \leq \text{Card}(P_{n,N+1})$ et la suite $(p_{n,N})_{N \geq 1}$ est croissante.

Si $n = 0$ alors $p_{n,N} = 1 \forall N \in \mathbb{N}^*$.

Si $n \geq 1$ alors pour tout $N > n$ et $(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N$ telle que $\sum_{k=1}^N ka_k = n$, alors $a_N = \dots = a_{n+1} = 0$, ainsi $p_{n,N} = p_{n,n}$.

Exemple : les partition de 5 :

5
4 + 1
3 + 2
3 + 1 + 1
2 + 2 + 1
2 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1

5 ▷ Si $N = 1$ alors $p_{n,N} = 1$ et pour tout $z \in D$, $\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $z \in D$, supposons que $\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$. Ecrivons

$$\frac{1}{1-z^{N+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{k(N+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_{N+1}(n) z^n \text{ avec } \varepsilon_{N+1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } N+1|n \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Le produit de Cauchy des séries entières donne

$$\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \varepsilon_{N+1}(k) p_{n-k,N} \right) z^n$$

de plus $p_{n-k,N} = \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N \\ a_1 + \dots + N a_N = n-k}} 1$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \varepsilon_{N+1}(k) p_{n-k,N} &= \sum_{\substack{k=0 \\ N+1|k}}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N \\ a_1 + \dots + N a_N = n-k}} 1 \\ &= \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_N, k) \in \mathbb{N}^{N+1} \\ a_1 + \dots + N a_N + k = n \\ N+1|k}} 1 \quad (\text{posons } k = a_{N+1}(N+1)) \\ &= \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_N, a_{N+1}) \in \mathbb{N}^{N+1} \\ a_1 + \dots + N a_N + a_{N+1}(N+1) = n}} 1 \\ &= p_{n, N+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Card}(P_{n,N}) z^n \\ &= \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}^N \\ a_1 + \dots + N a_N = n}} z^n \end{aligned}$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n, N+1} z^n$$

. Ainsi on la relation pour tout N .

6 ▷ Soit $z \in D$. Fixons $N \in \mathbb{N}$ la série $\sum (p_{n, N+1} - p_{n, N}) |z|^n$ converge de somme

$$\sigma_N = \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k} - \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-|z|^k} = |z|^{N+1} \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-|z|^k}$$

La suite $\left(\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-|z|^k} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante de limite $P(|z|)$ donc

$$\sigma_N \leq P(|z|) |z|^{N+1}$$

et la série $\sum \sigma_N$ converge d'où la sommabilité de la famille $((p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n)_{(n,N) \in \mathbb{N}^2}$.

Ce qui donne

$$\sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{N=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n$$

donc $\sum_N (p_{n,N+1} - p_{n,N})$ converge pour tout n et

$$\sum_{N=0}^{+\infty} (p_{n,N+1} - p_{n,N}) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_{N=0}^A (p_{n,N+1} - p_{n,N}) = p_{n,A+1} - p_{n,0} = p_n$$

car $p_{n,N+1} - p_{n,N} = 0$ si $n \leq N$, ce qui prouve la convergence de $\sum p_n z^n$ sur D , on a même la convergence absolue.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} &= \sum_{n=0}^N p_{n,N} z^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N} z^n \\ &= \sum_{n=0}^N p_n z^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N} z^n \end{aligned}$$

et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N} z^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N} |z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} p_n |z|^n \quad (\text{car } p_{n,N} \leq p_n)$$

donc $\sum_{n=N+1}^{+\infty} p_{n,N} z^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$, comme $\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-z^k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} P(z)$ alors $\sum_{n=0}^N p_n z^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} P(z)$ ainsi

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n \quad \forall z \in D.$$

La série $\sum_n p_n x^n$ converge pour tout x dans $]-1, 1[$ donc son rayon de convergence R est plus grand que 1, de plus $P(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ donc forcément $R \leq 1$, d'où $R = 1$.

7 ▷ La série $\sum p_n e^{-nt+in\theta}$ converge normalement pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, le théorème d'intégration des séries de fonctions donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P(e^{-t+i\theta}) d\theta$$

et

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P(e^{-t+i\theta})}{P(e^{-t})} d\theta \quad (1)$$

C. Contrôle de P

8 ▷ Soit $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1-xe^{i\theta}} \right| &= |\exp(L(xe^{i\theta}))| \\ &= \left| \exp\left(xe^{i\theta} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n e^{in\theta}}{n}\right) \right| \\ &\leq \exp\left(x \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) \\ &\leq \exp(x \cos \theta - x - \ln(1-x)) \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \frac{1-x}{1-xe^{i\theta}} \right| \leq \exp(-(1-\cos \theta)x)$$

Soit $x \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{1-x^k}{1-x^k e^{ik\theta}} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \exp(-(1-\cos(k\theta))x^k) \\ &\leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(k\theta) x^k\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right) \end{aligned}$$

9 ▷ Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, écrivons

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{x(1-e^{i\theta})(1-xe^{-i\theta})}{(1-x)|1-xe^{i\theta}|}\right) \\ &= \frac{x(1+x)(1-\cos\theta)}{(1-x)|1-xe^{i\theta}|} \\ &\geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)|1-xe^{i\theta}|} \end{aligned}$$

de plus $|1-xe^{i\theta}| = ((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))$.

Nous avons

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$$

donc

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))}\right)$$

si $(1-x)^2 \geq x(1-\cos\theta)$ alors

$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))} \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{3(1-x)^3} \geq \frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}$$

et

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right)$$

si $(1-x)^2 \leq x(1-\cos\theta)$ alors

$$\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2 + 2x(1-\cos\theta))} \geq \frac{1}{3(1-x)}$$

et

$$\left| \frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)} \right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

D. Intermède : quelques estimations de sommes

Soit $\alpha > 0$. et un entier $n \geq 1$.

10 ▷ $\varphi_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ et $\varphi_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrables sur $]0, +\infty[$.

On a

$$\varphi'_{n,\alpha}(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-e^{-x})^n} e^{-\alpha x} - \alpha \frac{x^n}{(1-e^{-x})^n} e^{-\alpha x} - \frac{nx e^{-x}}{(1-e^{-x})^{n+1}} e^{-\alpha x}$$

donc $\varphi'_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} O(x^n e^{-\alpha x})$ et $\varphi'_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{n}{2} - \alpha$ donc $\varphi_{n,\alpha}$ est intégrables sur $]0, +\infty[$.

11 ▷ Posons $f_k(t) = \frac{k^n e^{-kt\alpha}}{(1-e^{-kt})^n}$. On a $f_k(t) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{k^2})$ donc $\sum f_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, d'où l'existence de $S_{n,\alpha}(t)$ et $S_{n,\alpha}(t)$ est positive car les f_k le sont.

Soit pour tout $t > 0$, écrivons

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x) dx$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_{kt}^{(k+1)t} \varphi_{n,\alpha}(x) dx &= \varphi_{n,\alpha}((k+1)t) - \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \quad (*) \\ &= t^n \frac{(k+1)^n e^{-\alpha(k+1)t}}{(1-e^{-(k+1)t})^n} - \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \end{aligned}$$

toutes les sommes sont convergentes, d'où

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\alpha}(x) dx = t^{n+1} S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx.$$

On a

$$\left| \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \right| \leq t \int_{kt}^{(k+1)t} |\varphi'_{n,\alpha}(x)| dx$$

La fonction $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* donc

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kt}^{(k+1)t} (x-kt) \varphi'_{n,\alpha}(x) dx \right| \leq t \int_0^{+\infty} |\varphi'_{n,\alpha}(x)| dx$$

ce qui donne

$$S_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^n} dx + O\left(\frac{1}{t^n}\right) \quad \text{quand } t \rightarrow 0^+.$$

12 ▷ La fonction $f : x \mapsto \frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $f(x) = x e^{-(k+1)x}$, le théorème d'inversion de \sum et \int donne le résultat.

E. Contrôle des fonctions caractéristiques

13 ▷ On a $\Phi_X(\theta) := \mathbb{E}(\cos(\theta X)) + i\mathbb{E}(\sin(\theta X))$ donc

$$|\Phi_X(\theta)|^2 = \mathbb{E}(\cos(\theta X))^2 + \mathbb{E}(\sin(\theta X))^2$$

L'inégalité de Cauchy donne $\mathbb{E}(\cos(\theta X))^2 \leq \mathbb{E}(\cos(\theta X)^2)$ et $\mathbb{E}(\sin(\theta X))^2 \leq \mathbb{E}(\sin(\theta X)^2)$ donc

$$|\Phi_X(\theta)|^2 \leq \mathbb{E}(\cos(\theta X)^2) + \mathbb{E}(\sin(\theta X)^2) = \mathbb{E}(\cos(\theta X)^2 + \sin(\theta X)^2) = 1$$

14 ▷ $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$. Le théorème du transfert donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\cos(\theta(aX+b))) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(\theta(ak+b)) \mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \cos(\theta(ak+b)) p q^{k-1} \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{i\theta(ak+b)} p q^{k-1} \\ &= \operatorname{Re} \frac{p e^{i\theta(a+b)}}{1 - q e^{i\theta}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sin(\theta(aX+b))) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\theta(ak+b))pq^{k-1} \\ &= \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{i\theta(ak+b)}pq^{k-1} \\ &= \operatorname{Im} \frac{pe^{i\theta(a+b)}}{1-qe^{i\theta}}\end{aligned}$$

d'où

$$\Phi_{aX+b}(\theta) = \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{i\theta}}$$

15 ▷ $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X^k est d'espérance finie si la série $\sum_{n \geq 1} n^k \mathbb{P}(X = n)$ converge.

On a $n^k \mathbb{P}(X = n) = n^k pq^{n-1}$, comme $R_{cv}(\sum n^k x^n) = 1$ donc $\sum_{n \geq 1} n^k pq^{n-1}$ converge et $\mathbb{E}(X^k)$ existe.

On a

$$\Phi_X(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}} = p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} e^{in\theta}$$

Les séries $\sum_{n \geq 1} q^{n-1} n^k e^{in\theta}$ convergent normalement sur \mathbb{R} , pour tout k dans \mathbb{N} , donc Φ_X de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et

$$\Phi_X^{(k)}(\theta) = p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} (in)^k e^{in\theta}$$

Ainsi $\Phi_X^{(k)}(0) = p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} (in)^k = i^k \mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

16 ▷ Soit $f_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. On a $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$, supposons que $f_k(x) = \frac{xP_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$

remarquons que $xf'_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^n = f_{k+1}(x)$ donc

$$f_{k+1}(x) = \frac{x((1-x)(xP_k(x))' + x(k+1)P_k(x))}{(1-x)^{k+2}}$$

qui est de la forme $f_{k+1}(x) = \frac{xP_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}}$ et P_{k+1} un polynôme à coefficient dans \mathbb{C} , indépendant de p . D'où le résultat pour tout k dans \mathbb{N} . De plus $\frac{f_k(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc $P_k(0) = 1$.

La fonction $z \mapsto \frac{zP_k(z)}{(1-z)^{k+1}}$ est DSE en 0, par unicité des coefficients on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k z^n = \frac{zP_k(z)}{(1-z)^{k+1}} \text{ pour tout } |z| < 1$$

Ainsi pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\Phi_X^{(k)}(\theta) = \frac{p}{q} i^k f_k(qe^{i\theta}) = pi^k \frac{e^{i\theta} P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}}$$

17 ▷ On a

$$\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k) = i^k \frac{P_k(q)}{p^k}$$

donc

$$\left| \mathbb{E}(X^k) - \frac{1}{p^k} \right| \leq \frac{|P_k(q) - 1|}{p^k}$$

puisque $P_k(0) = 1$ et P_k indépendant de p donc $P_k(q) = 1 + a_1 q + \dots + a_r q^r$ et $|P_k(q) - 1| \leq q(|a_1| + \dots + |a_r|)$, ce qui donne le résultat.

18 ▷ On a

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4) = \mathbb{E}(X^4) + 4\mathbb{E}(X^3)\mathbb{E}(X) + 6\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(X)^2 + 4\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)^3 + \mathbb{E}(X)^4$$

l'inégalité précédente donne le résultat.

19 ▷ Y une variable aléatoire réelle centrée Y telle que Y^4 soit d'espérance finie.

Pour $k \in \{2, 3\}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $|t|^k \leq 1 + t^4$ ce qui prouve que Y^2 et $|Y|^3$ sont d'espérance finie.

L'inégalité de convexité donne

$$\mathbb{E}(Y^2)^2 \leq (\mathbb{E}(Y^4))$$

et

$$\mathbb{E}(|Y|^3)^{4/3} \leq (\mathbb{E}((Y^4)^{4/3}))$$

soit

$$\mathbb{E}(Y^2) \leq (\mathbb{E}(Y^4))^{1/2} \text{ et } \mathbb{E}(|Y|^3) \leq (\mathbb{E}(Y^4))^{3/4}$$

20 ▷ La formule Taylor avec reste intégrale donne Montrer, pour tout réel u , l'inégalité

$$e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} = \int_0^u \frac{i^3 e^{it}}{2} (u-t)^2 dt$$

donc

$$\left| e^{iu} - 1 - iu + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^u (u-t)^2 dt \right| = \frac{|u|^3}{6}$$

Soit θ dans \mathbb{R} , on a

$$\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} = \mathbb{E}(\cos(\theta Y) - 1 + \frac{Y^2\theta^2}{2}) + i\mathbb{E}(\sin(\theta Y) - \theta Y)$$

car $\mathbb{E}(Y) = 0$, donc

$$\left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right|^2 = \mathbb{E} \left(\cos(\theta Y) - 1 + \frac{Y^2\theta^2}{2} \right)^2 + \mathbb{E}(\sin(\theta Y) - \theta Y)^2$$

de plus

$$\left| \mathbb{E} \left(\cos(\theta Y) - 1 + \frac{Y^2\theta^2}{2} \right) \right| \leq \mathbb{E} \left(\left| \cos(\theta Y) - 1 + \frac{Y^2\theta^2}{2} \right| \right) \leq \frac{|\theta|^3}{6} \mathbb{E}(|Y|^3)$$

et

$$|\mathbb{E}(\sin(\theta Y) - \theta Y)| \leq \mathbb{E}(|\sin(\theta Y) - \theta Y|) \leq \frac{|\theta|^3}{6} \mathbb{E}(|Y|^3)$$

donc

$$\left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \leq \sqrt{2} \frac{|\theta|^3}{6} \mathbb{E}(|Y|^3) \leq \frac{|\theta|^3}{3} \mathbb{E}(|Y|^3)$$

finalement on a $\mathbb{E}(|Y|^3) \leq (\mathbb{E}(Y^4))^{3/4}$ d'où le résultat.

21 ▷ Par la formule Taylor on obtient pour $x \geq 0$ $|e^{-x} - 1 + x| \leq \frac{x^2}{2}$, donc $|e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{x^4}{8}$.

Pour tout réel θ , on a

$$\left| \exp \left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)^2\theta^4}{8} \leq \frac{\mathbb{E}(Y^4)\theta^4}{8}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \left| \Phi_Y(\theta) - \exp \left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right) \right| &\leq \left| \Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| + \left| \exp \left(-\frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right) - 1 + \frac{\mathbb{E}(Y^2)\theta^2}{2} \right| \\ &\leq \frac{|\theta|^3}{3} (\mathbb{E}(Y^4))^{3/4} + \frac{\theta^4}{8} \mathbb{E}(Y^4) \end{aligned}$$

F. Convergence vers une gaussienne

22 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_n$ des complexes tous de module inférieur ou égal à 1.

L'inégalité est vraie pour $n = 1$, on la suppose pour un $n > 1$. Soit $z_1, \dots, z_{n+1}, u_1, \dots, u_{n+1}$ des complexes tous de module inférieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n+1} z_k - \prod_{k=1}^{n+1} u_k \right| &= \left| z_{n+1} \left(\prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n u_k \right) - (z_{n+1} - u_{n+1}) \prod_{k=1}^n u_k \right| \\ &\leq |z_{n+1}| \left| \prod_{k=1}^n z_k - \prod_{k=1}^n u_k \right| + |z_{n+1} - u_{n+1}| \left| \prod_{k=1}^n u_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |z_k - u_k| + |z_{n+1} - u_{n+1}| \end{aligned}$$

d'où le résultat.

23 ▷ Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On considère, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire Z_k suivant la loi $\mathcal{G}(1 - e^{-kt})$, et on a

$$Y_k = k(Z_k - \mathbb{E}(Z_k)) = kZ_k - \frac{k}{1 - e^{-kt}} \text{ et } E(Y_k^2) = \frac{ke^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^2}$$

donc

$$\Phi_{Y_k}(\theta) = \frac{(1 - e^{-kt}) \exp\left(\frac{-i\theta e^{-kt}}{1 - e^{-kt}}\right)}{1 - e^{k(i\theta - t)}}$$

On a

$$\begin{aligned} h(t, \theta) &= e^{-im_t \theta} \frac{P(e^{-t} e^{i\theta})}{P(e^{-t})} \\ &= \exp(-i\theta \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{-kt}}{1 - e^{-kt}}) \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-nt} e^{i\theta n}}. \end{aligned}$$

ce qui donne

$$h(t, \theta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta).$$

En déduire, à l'aide en particulier de la question 21▷ l'inégalité

$$\left| \Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y_k^2) \theta^2}{2}\right) \right| \leq \frac{|\theta|^3}{3} (\mathbb{E}(Y_k^4))^{3/4} + \frac{\theta^4}{8} \mathbb{E}(Y_k^4)$$

$$\begin{aligned} \left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \prod_{k=1}^n \Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{-\theta^2 k^2 e^{-kt}}{2(1 - e^{-kt})^2}\right) \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left| \Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(\frac{-\theta^2 k^2 e^{-kt}}{2(1 - e^{-kt})^2}\right) \right| \quad (\text{d'après } \mathbf{22} \triangleright) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}(Y_k^2) \theta^2}{2}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\theta|^3}{3} (\mathbb{E}(Y_k^4))^{3/4} + \frac{\theta^4}{8} \mathbb{E}(Y_k^4) \\ &\leq K^{3/4} |\theta|^3 S_{3,3/4}(t) + K\theta^4 S_{4,1}(t). \end{aligned}$$

les questions **18** ▷ donne $\mathbb{E}(Y_k^4) \leq K \frac{k^4 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^4}$ donc

$$\left| h(t, \theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2 \theta^2}{2}} \right| \leq K^{3/4} \frac{|\theta|^3}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{-3kt/4}}{(1 - e^{-kt})^{3/4}} + \frac{K\theta^4}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^4 e^{-kt}}{(1 - e^{-kt})^4}$$

d'où le résultat.

24 ▷ .On a d'après 11▷

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= S_{2,1}(t) \\ &\underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1}{t^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} dx + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ &\underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi^2}{3t^3}\end{aligned}$$

d'où

$$\sigma_t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

On a aussi d'après 11▷

$$m_t = \frac{1}{t^2} \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx + O\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{\pi^2}{6t^2} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Nous avons

$$\zeta(t, u) = \exp\left(i \frac{u}{\sigma_t} \left(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2}\right)\right) \quad \text{et} \quad j(t, u) = \zeta(t, u) h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right).$$

D'après 23., on a

$$\left| h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) - e^{-\frac{u^2}{2}} \right| \leq K^{\frac{3}{4}} \frac{|u|^3}{|\sigma_t|^3} \times O\left(\frac{1}{t^4}\right) + K \frac{u^4}{\sigma_t^4} \times O\left(\frac{1}{t^5}\right) = O(\sqrt{t}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

et

$$\zeta(t, u) = \exp\left(i \frac{u}{\sigma_t} O\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \exp(O(\sqrt{t})) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

On en déduit que pour tout réel u , que

$$j(t, u) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} e^{-u^2/2}$$

25 ▷ On a pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\cos \theta = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!}$, donc la fonction

$$g : \theta \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} & \text{si } \theta \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \theta = 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ donc bornée et atteint ses borne, soit $\alpha = \inf_{\theta \in [-\pi, \pi]} g(\theta)$, il existe $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ telle que $\alpha = g(\theta_0)$, g ne s'annule pas sur $[-\pi, \pi]$ donc garde un signe constant celui de $g(0)$ donc $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ et

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi], 1 - \cos \theta \geq \alpha \theta^2.$$

On a, pour t assez proche de 0, $e^{-t} \in [\frac{1}{2}, t[$ donc :

$$\begin{aligned}|h(t, \theta)| &\leq \exp\left(-\frac{1 - \cos \theta}{6(1 - e^{-t})^3}\right) \quad \text{ou} \quad |h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1 - e^{-t})}\right) \\ |h(t, \theta)| &\leq \exp\left(-\frac{\alpha \theta^2}{6(1 - e^{-t})^3}\right) \quad \text{ou} \quad |h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1 - e^{-t})}\right)\end{aligned}$$

On a $1 - e^{-t} \leq t$ pour tout $t \geq 0$, donc

$$|h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{\alpha \theta^2}{6t^3}\right) \quad \text{ou} \quad |h(t, \theta)| \leq \exp\left(-\frac{1}{3t}\right)$$

Come $\sigma_t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$ donc il existe $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, t_0]$

$$\frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}} \leq \sigma_t \leq \frac{3}{2} \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

d'où l'existence de $\beta > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $t \in [0, t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$|h(t, \theta)| \leq e^{-\beta(\sigma_t \theta)^2} \quad \text{ou} \quad |h(t, \theta)| \leq e^{-\delta(\sigma_t)^{2/3}}.$$

comme $\frac{|\theta|}{\pi} \leq 1$ alors $e^{-\delta(\sigma_t)^{2/3}} \leq e^{-\frac{\delta}{\pi^{2/3}}(\sigma_t|\theta|)^{2/3}}$ ce qui donne le résultat avec $\gamma = \frac{\delta}{\pi^{2/3}}$.

26 \triangleright écrivons

$$\begin{aligned} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du &= \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} \zeta(t, u) h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t, u) h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) 1_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]} du \end{aligned}$$

de plus

$$\left| \zeta(t, u) h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) 1_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]} \right| \leq \left| h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) \right|$$

donc

$$\left| \zeta(t, u) h\left(t, \frac{u}{\sigma_t}\right) 1_{[-\pi\sigma_t, \pi\sigma_t]} \right| \leq e^{-\beta u^2} \quad \text{ou} \quad e^{-\gamma u^{2/3}}$$

le théorème de convergence dominée donne

$$\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t, u) du \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$$

G. La conclusion

27 \triangleright En applique la formule (1) à $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ donc $n = \frac{\pi^2}{6t^2}$,

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}+i\theta}\right)}{P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)} d\theta \\ &= \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} e^{im_t\theta} h\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}, \theta\right) d\theta \\ &\stackrel{u=\theta\sigma_t}{=} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} e^{i(m_t - \frac{\pi^2}{6t^2})\frac{u}{\sigma_t}} h\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}, \frac{u}{\sigma_t}\right) du \\ &= \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi\sigma_t} \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}, u\right) du \end{aligned}$$

On a $\sigma_t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}(6n)^{3/4}}{\sqrt{3}}$

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}} P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right)}{2\pi\sigma_t}$$

de plus $\sigma_t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6n}}\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}(6n)^{3/4}}{\sqrt{3}}$ et $P\left(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(6n)^{1/4}} e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}$

d'où la formule de Hardy et Ramanujan

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}}{4\sqrt{3}n}$$