

I Endomorphisme nilpotent, trace d'un endomorphisme

I.A - Injectivité et valeur propre nulle

I.A.1) f est injectif $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(f - 0Id_E) = \{0\} \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de f .

I.A.2) On est ici en dimension finie.

Dans ce cas, pour une application linéaire,

f injectif de E dans $E \Leftrightarrow f \in GL(E) \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de f .

I.A.3) Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$,

M est inversible

$\Leftrightarrow M$ est associée dans une certaine base à un automorphisme

$\Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme associé

$\Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de M .

I.B - Matrice nilpotente

I.B.1) On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

On en déduit que N est nilpotente et que $k(N) = 3$.

I.B.2) a) On a $M = P^{-1}NP$ et donc $M^2 = P^{-1}NPP^{-1}NP = P^{-1}N^2P$.

On en déduit que M^2 et N^2 sont semblables, avec la même matrice de passage.

On admet la propriété au rang p , on la montre au rang $p + 1$.

On a donc $M^p = P^{-1}N^pP$.

$M^{p+1} = M^pM = P^{-1}N^pPP^{-1}NP = P^{-1}N^{p+1}P$.

La propriété est donc vérifiée au rang $p + 1$, elle est donc vraie à tous les rangs.

b) N^p et $P^{-1}N^pP$ sont toutes les deux nulles ou toutes les deux non nulles.

Il en est donc de même pour M^p et N^p . Deux matrices semblables sont donc ou nilpotentes ou non nilpotentes en même temps. Dans le cas où elles sont nilpotentes, elles ont aussi même indice de nilpotence.

I.B.3) $\text{Mat}_{B'}(f)$ et $\text{Mat}_B(f)$ sont semblables. Elles sont donc nilpotentes en même temps avec le même indice de nilpotence.

I.B.4) a) $n_{ij}^{(2)} = \sum_{p=1}^n n_{ip}n_{pj}$ avec $j \leq i + 1$.

– Si $j \leq p$, alors, $n_{pj} = 0$,

– si $p < j$, alors $p < i + 1$, donc $p \leq i$, et, $n_{ip} = 0$.

Dans tous les cas $n_{ip}n_{pj} = 0$ et donc $n_{ij}^{(2)} = 0$ quand $j \leq i + 1$.

b) On montre bien sûr ceci par récurrence sur k .

La vérification initiale pour $k = 0$ est évidente, on l'a aussi pour $k = 1$ et on l'a montré pour $k = 2$.

On l'admet au rang k et on le montre au rang $k + 1$.

$n_{ij}^{(k+1)} = \sum_{p=1}^n n_{ip}^{(k)}n_{pj}$, avec

– si $j \leq p$, alors $n_{pj} = 0$;

– si $p < j$, alors, $p < i + k$, donc, $p \leq i + k - 1$, alors $n_{ip}^{(k)} = 0$.

On a toujours un des termes du produit qui est nul, donc $n_{ij}^{(k+1)} = 0$.

c) Quand $k \geq n$, alors, $i + k - 1 \geq n$, on a donc toujours $j \leq i + k - 1$, donc tous les coefficients de N^k sont nuls et $N^k = 0$.

N est bien nilpotente.

I.B.5) a) Le déterminant d'une matrice triangulaire étant le produit des termes diagonaux, les valeurs propres de f , qui sont celles de N , sont donc les termes diagonaux de N .

b) Si 0 est la seule valeur propre de f , alors, N vérifie les hypothèses du **I.B.4)**, et est donc nilpotente. f est alors nilpotent aussi.

S'il existe une valeur propre non nulle λ , alors il existe un vecteur propre associé u . Un calcul classique par une récurrence enfantine donne $f^p(u) = \lambda^p u \neq 0$. f n'est donc pas nilpotente.

On a bien l'équivalence demandée.

I.B.6) C'est l'équivalence précédente appliquée à l'endomorphisme N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.C - Trace et valeurs propres

I.C.1) On considère deux matrices semblables vérifiant $N = P^{-1}MP$, alors $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(P^{-1}MP)$.

On sait que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, donc $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(MPP^{-1}) = \text{Tr}(MI_n) = \text{Tr}(M)$.

Deux matrices semblables ont bien même trace.

I.C.2) Il existe une base où la matrice de f est N , triangulaire supérieure. Alors $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(N)$, c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux, ou encore la somme des valeurs propres de N , et donc de celles de f .

I.C.3) On est sur les complexes, le polynôme caractéristique est scindé, et A est semblable à une matrice triangulaire supérieure N .

On a donc soit une valeur propre double λ , nulle puisque $\lambda + \lambda = 0$, soit deux valeurs propres simples, opposées puisque leur somme est nulle, ces deux valeurs propres étant alors non nulles.

– Dans le premier cas, $N = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et N est nilpotente, donc A est aussi nilpotente.

– Dans le second cas, A est diagonalisable.

Finalement A est soit nilpotente, soit diagonalisable.

I.C.4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est de trace nulle, non nilpotente, et non diagonalisable car le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 seulement.

Il suffit pour cela de regarder le rang de $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, c'est clairement une matrice de rang 2.

II Exponentielle d'un endomorphisme

II.A - Endomorphisme diagonalisable

II.A.1) a) $M = \mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$

b) $\det(M) = \exp(\lambda_1) \times \cdots \times \exp(\lambda_n) \neq 0$, puisqu'une exponentielle n'est jamais nulle.

Donc $f \in \text{GL}(E)$.

II.A.2) On a $D_2 = P_2^{-1} P_1 D_1 P_1^{-1} P_2 = (P_2^{-1} P_1) D_1 (P_2^{-1} P_1)^{-1}$

D_1 et D_2 sont donc les matrices d'un même endomorphisme f dans deux bases différentes, la matrice de changement de base étant $P_2^{-1} P_1$. Or, on a admis que $\exp(f)$ ne dépendait pas de la base utilisée pour la définir.

Dans la première base, sa matrice est $\exp(D_1)$, et dans la seconde $\exp(D_2)$.

Ce qui donne $\exp(D_2) = (P_2^{-1} P_1) \exp(D_1) (P_2^{-1} P_1)^{-1} = P_2^{-1} P_1 \exp(D_1) P_1^{-1} P_2$

Donc $P_2 \exp(D_2) P_2^{-1} = P_1 \exp(D_1) P_1^{-1}$.

Ceci permet bien de définir $\exp(M)$ avec M diagonalisable, le calcul dépend de la base, mais pas le résultat.

II.B - Endomorphisme nilpotent

II.B.1) M étant strictement triangulaire, puisque ses valeurs propres sont nulles, M^p a des termes diagonaux nuls dès que $p \geq 1$.

Les termes diagonaux de $\exp(M)$ sont donc ceux de $M^0 = I$, égaux à 1.

II.B.2) Si M est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$, M^p est la matrice de f^p dans cette même base et $\exp(M)$ est la matrice de $\exp(f)$, toujours dans la même base.

$\exp(M)$ possède une valeur propre unique 1, il en est de même pour $\exp(f)$.

II.C - Somme d'endomorphismes diagonalisable et nilpotent

II.C.1) a) On va d'abord montrer que $g \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g$.

Il suffit de montrer le résultat sur une base, ici une base de vecteurs propres de d .

Il suffit donc de le montrer pour un vecteur propre de d .

Soit u un tel vecteur propre et λ la valeur propre associée.

$g(\exp(d)(u)) = g(\exp(\lambda) u) = \exp(\lambda) g(u)$.

D'autre part, $d \circ g = g \circ d$, donc $d(g(u)) = g(d(u)) = g(\lambda u) = \lambda g(u)$.

Ceci prouve que $g(u)$ est soit nul, soit propre pour d et la valeur propre λ .

Dans tous les cas, $\exp(d)(g(u)) = \exp(\lambda) g(u)$.

On a bien montré que $g \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g$.

En appliquant p fois cette propriété, y compris si $p = 0$, on a $g^p \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g^p$.

Ensuite $\exp(g) \circ \exp(d) = \sum_{p=0}^{k(g)-1} g^p \circ \exp(d) = \sum_{p=0}^{k(g)-1} \exp(d) \circ g^p = \exp(d) \circ \sum_{p=0}^{k(g)-1} g^p$

$= \exp(d) \circ \exp(g)$.

b) Si M est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$, D y est la matrice de d , diagonalisable, et N y est la matrice de g , nilpotent.

$DN = ND$ entraîne $d \circ g = g \circ d$ et $M = D + N$ entraîne $f = d + g$.

Comme le couple (d, g) est unique, il en est donc de même du couple (D, N) .

II.C.2) On a $M = D + N$ avec $DN = ND$.

$PMP^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}$ avec PDP^{-1} diagonalisable et PNP^{-1} nilpotente.

De plus $PDP^{-1} PNP^{-1} = PDNP^{-1} = PNDP^{-1} = PNP^{-1} PDP^{-1}$.

Donc PDP^{-1} et PNP^{-1} forment l'unique couple associé à PMP^{-1} .

Ainsi $\exp(PMP^{-1}) = \exp(PDP^{-1}) \exp(PNP^{-1}) = P \exp(D) P^{-1} P \exp(N) P^{-1}$

$= P \exp(D) \exp(N) P^{-1} = P \exp(M) P^{-1}$.

III Le cas $n = 2$

III.A - f non diagonalisable

III.A.1) Si $\lambda \neq \mu$, alors, f aurait deux valeurs propres simples et serait diagonalisable.

Comme ça n'est pas le cas, $\lambda = \mu$ et $\dim(E_\lambda) = 1$ car f n'est pas diagonalisable.

Il existe une base où la matrice de f est triangulaire supérieure, égale à $M = \begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$$M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (M - \lambda I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a bien alors $(f - \lambda Id_E)^2 = 0$.

III.A.2) $(f - \lambda Id_E)(u) = (f - \lambda Id_E)^2(v) = 0$, d'où $u \in E_\lambda$.

D'autre part $u \neq 0$ car $v \notin E_\lambda$.

Il suffit maintenant de montrer que la famille (u, v) est libre.

On considère $\alpha u + \beta v = 0$,

on applique $f - \lambda Id_E$ à cette égalité, $\alpha(f - \lambda Id_E)(u) + \beta(f - \lambda Id_E)(v) = 0$.

$(f - \lambda Id_E)(u) = 0$ et $(f - \lambda Id_E)(v) = u$, on obtient donc $\beta u = 0$ et ensuite $\beta = 0$.

L'égalité du départ devient $\alpha u = 0$ et donc $\alpha = 0$.

La famille est libre, (u, v) est une base.

On a $f(u) = \lambda v$ et $f(v) = u + \lambda v$, la matrice de f dans la base (u, v) est donc $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

III.B - Si M est diagonalisable, elle est semblable à $D(\lambda, \mu)$, ou $D(\lambda, \lambda)$.

Si M n'est pas diagonalisable, on vient de voir qu'elle est semblable à $M(\lambda)$.

Toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$.

III.C - Une matrice diagonale D s'écrit $D = D + 0$ avec 0 nilpotente et $D \times 0 = 0 \times D$, c'est donc une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$.

$M(a) = D + N$ avec $D = aI_2$, diagonale donc diagonalisable, et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotente.

De plus $I_2 N = N I_2 = N$, c'est encore une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$.

On a bien $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$.

III.D - $\Gamma_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est évident.

Réciproquement, une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$, donc à une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$.

Mais une matrice semblable à une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$ est une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$.

On a bien également $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$.

Finalement, on a bien $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = \Gamma_2(\mathbb{C})$.

III.E -

III.E.1) $A(\theta)$ est diagonalisable facilement avec $D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $A(\theta) = P D P^{-1}$.

$$\text{Puis, } \exp(A(\theta)) = P \exp(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

III.E.2) Il est clair que $\exp(A(\theta)) = \exp(A(\theta + 2\pi))$, l'exponentielle n'est pas ici injective.

III.E.3) Une matrice de $J_2(\mathbb{C}) \cap \text{GL}_2(\mathbb{C})$ est semblable à $D(a, b)$ ou $M(a)$ avec a et b non nuls.

– Si $a = \rho \exp(i\theta)$ et $b = \rho' \exp(i\theta')$, alors $a = \exp(i\theta \ln(\rho))$ et $b = \exp(i\theta' \ln(\rho'))$.

$$\text{C'est à dire } D(a, b) = \exp \left(\begin{pmatrix} i\theta \ln(\rho) & 0 \\ 0 & i\theta' \ln(\rho') \end{pmatrix} \right).$$

– Comme $a \neq 0$, $M(a)$ est semblable à $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$, en remplaçant le premier vecteur de base par $\frac{1}{a}$ fois lui-même.

Avec les mêmes notations pour a ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \left(\begin{pmatrix} i\theta \ln(\rho) & 0 \\ 0 & i\theta \ln(\rho) \end{pmatrix} \right) \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \exp \left(\begin{pmatrix} i\theta \ln(\rho) & 0 \\ 0 & i\theta \ln(\rho) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \exp \left(\begin{pmatrix} i\theta \ln(\rho) & 1 \\ 0 & i\theta \ln(\rho) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

III.E.4) Toute matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, donc semblable à l'image par l'exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$.

Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on a $N = P^{-1}MP \in J_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

$N = \exp(Q^{-1}BQ)$ avec $Q^{-1}BQ \in J_2(\mathbb{C})$ et donc $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

donc $M = P \exp(Q^{-1}BQ) P^{-1} = \exp\left((PQ^{-1})B(PQ^{-1})^{-1}\right) = \exp(A)$.

On a bien trouvé une matrice A antécédent de M pour l'exponentielle.

L'exponentielle est bien surjective.

III.F - Soient λ et μ les valeurs propres de M . Celles de $\exp(M)$ sont $\exp(\lambda)$ et $\exp(\mu)$.

$\det(\exp(M)) = \exp(\lambda) \exp(\mu)$, et $\exp(\mathrm{Tr}(M)) = \exp(\lambda + \mu) = \exp(\lambda) \exp(\mu)$.

On a bien l'égalité demandée.

III.G -

III.G.1) Il faut montrer que $SL_2(\mathbb{C})$ est une partie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

– Une matrice de déterminant 1 est inversible.

– $I_2 \in SL_2(\mathbb{C})$, il est non vide.

– Le déterminant du produit est le produit des déterminants, $SL_2(\mathbb{C})$ est stable par produit.

– Le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant et $\frac{1}{1} = 1$, $SL_2(\mathbb{C})$ est stable par passage à l'inverse.

On a bien un sous-groupe.

Si $M \in L_0(\mathbb{C})$, sa trace est nulle, l'exponentielle de sa trace est 1.

Donc le déterminant de $\exp(M) = 1$, on a bien $\exp(M) \in SL_2(\mathbb{C})$.

III.G.2) Soit $M \in L_0(\mathbb{C})$, elle est soit diagonalisable, soit non diagonalisable.

– Si elle est diagonalisable, les valeurs propres sont opposées,

elle est semblable à $D(a, -a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

– Si elle est non diagonalisable, la valeur propre est double, donc nulle,

elle est donc semblable à $M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III.G.3) On a bien $\det(N') = 1$, et donc, $N' \in SL_2(\mathbb{C})$.

$\exp(D(a)) = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 \\ 0 & \exp(-a) \end{pmatrix}$, qui n'est pas semblable à N' , car celle-ci n'est pas diagonalisable.

$\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas semblable à N' , car ses valeurs propres sont 1, double, et non -1, double.

$\widetilde{\exp}$ n'est donc pas surjective.

Comme $\exp(D(a)) = \exp(D(a + 2i\pi))$, $\widetilde{\exp}$ n'est pas injective non plus.

IV Le cas $n = 3$

IV.A - Si on a trois valeurs propres simples, alors, f est diagonalisable.

De plus, $f = f + 0$, avec 0 nilpotente et $0 \times f = f \times 0$.

On a bien $f \in \Gamma_3(\mathbb{C})$.

IV.B - Une valeur propre triple

IV.B.1) $f - \lambda Id_E$ possède une unique valeur propre nulle, elle est donc nilpotente.

IV.B.2) $f = \lambda Id_E + (f - \lambda Id_E)$ avec $(\lambda Id_E) \times (f - \lambda Id_E) = (f - \lambda Id_E) \times (\lambda Id_E)$.

On a bien $f \in \Gamma_3(\mathbb{C})$.

IV.C - Une valeur propre double et une simple

IV.C.1) On sait qu'il existe une base où la matrice de f est triangulaire supérieure, c'est à dire une

base où sa matrice est $\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

On appelle (e_1, e_2, e_3) les vecteurs de cette base,

les colonnes de la matrice donnent alors $\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = a e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = b e_1 + c e_2 + \nu e_3 \end{cases}$

IV.C.2) Le déterminant de (e_1, e_2, e'_3) dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

On a bien une nouvelle base de E .

IV.C.3) $f(e'_3) = f(e_3) + \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = \nu e_3 + b e_1 + c e_2 + \alpha \lambda e_1 + \beta a e_1 + \beta \lambda e_2$
 $= \nu(e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2) + (b + \alpha \lambda + \beta a - \alpha \nu) e_1 + (c + \beta \lambda - \beta \nu) e_2$.

e'_3 sera propre pour la valeur propre ν si et seulement si $\alpha(\lambda - \nu) + \beta c + b = 0$ et $\beta(\lambda - \nu) + c = 0$.
 Comme $\lambda - \nu \neq 0$, on trouve β qui convient dans la deuxième équation puis α dans la première.

IV.C.4) Dans cette base (e_1, e_2, e'_3) , la matrice de f est $M = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

IV.C.5) On a $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La première matrice est diagonalisable et la seconde nilpotente !

De plus, par un calcul simple, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $M \in \Gamma_3(\mathbb{C})$, et donc, $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.D - On est sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de f est scindé, et on a trois cas pour les valeurs propres : une triple, une double et une simple, trois simples.

Dans tous les cas, on a montré que $f \in \Gamma_3(E)$, donc $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.E - Un exemple

IV.E.1) $R(\theta)$ est diagonalisable facilement avec $D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 & 0 \\ 0 & -i\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $R(\theta) = PDP^{-1}$.

$$\text{Puis, } \exp(R(\theta)) = P \exp(D) P^{-1} = P \begin{pmatrix} \exp(i\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.E.2) Clairement, $\exp(R(\theta)) = \exp(R(\theta + 2\pi))$.

L'application $\exp$ n'est pas injective.