

E3A, 2004, MP, Mathématiques B

(6 pages)

Exercice 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt = e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} (-du) = -g(x)$ en effectuant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale. Ainsi g est impaire.

2. L'application $t \mapsto e^{t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \int_0^{-x} e^{t^2} dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -2x e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} = -2x g(x) + 1$. Donc g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. L'équation (E) est une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$ qui admet donc, suivant le théorème de Cauchy, comme ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ un espace affine de direction l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène (H) : $y' + 2xy = 0$. Les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ étant les fonctions $x \mapsto C e^{-x^2}$ où C est une constante réelle si on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$, complexe si on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$, on obtient que :
les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions $x \mapsto g(x) + C e^{-x^2}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

4. (a) Si $R > 0$ et le rayon de convergence de $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ et $\forall x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y'(x) + 2x y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} x^i + 2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+1} = a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} ((i+1) a_{i+1} + 2a_{i-1}) x^i$$

et si y est solution de (E) sur $] -R, R[$ alors $\forall i \geq 1, (i+1)a_{i+1} + 2a_{i-1} = 0$ soit $\forall i \geq 0, (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0$.

- (b) $\diamond$ On obtient aussi $a_1 = 1$.

$\diamond$ L'égalité du [a] donne $\forall i \geq 1, (2i+1)a_{2i+1} = -2a_{2i-1}$ donc $a_{2i+1} = \frac{-2}{2i+1} a_{2i-1} = \frac{-2}{2i+1} \frac{-2}{2i-1} \cdots \frac{-2}{3} a_1$,
 par récurrence immédiate. Donc $\forall i \geq 0, a_{2i+1} = \frac{(-2)^i}{(2i+1) \cdot (2i-1) \cdots 3} = (-2)^i \frac{(2i) \cdots 2}{(2i+1) \cdot (2i) \cdots 3 \cdot 2}$.

Ceci donne $\forall i \geq 0, a_{2i+1} = (-4)^i \frac{i!}{(2i+1)!}$.

- (c) $\diamond$ De même, $\forall i \geq 1, (2i)a_{2i} = -2a_{2i-2}$ donc $a_{2i} = \frac{-2}{2i} \frac{-2}{2} a_0$ donc $\forall i \geq 0, a_{2i} = \frac{(-1)^i}{i!} a_0$.

$\diamond$ Ainsi la sous-suite $(a_{2i})_{i \in \mathbb{N}}$ est uniquement définie par la valeur de a_0 , tandis que la sous-suite $(a_{2i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ est connu explicitement donc la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est uniquement définie par la valeur de a_0 .

- (d) Les calculs précédents montrent qu'on a, en général, pour une suite vérifiant la relation de récurrence,
 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^{2i} + a_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-4)^i \frac{i!}{(2i+1)!} x^{2i+1} = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$. La série entière y_0 est de rayon de convergence $+\infty$: c'est le développement de $x \mapsto e^{-x^2}$. Quant à la série entière y_1 , on peut lui appliquer la règle de D'Alembert : $\frac{4^i i!}{(2i+1)!} \frac{(2i+3)!}{4^{i+1}(i+1)!} = \frac{(2i+3)(2i+2)}{4(i+1)} = i + \frac{3}{2} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty$ et donc

elle est également de rayon de convergence $+\infty$. Comme combinaison linéaire de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

- (e) Ainsi toutes les séries entières vérifiant la relation de récurrence précédente et la condition $a_1 = 1$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E). Comme, d'après le théorème de Cauchy, (E) admet une unique solution vérifiant la condition $y(0) = 0$ et que g et $x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} (-4)^i \frac{i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}$ sont des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant cette condition, on a $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-4)^i \frac{i!}{(2i+1)!} x^{2i+1}$.
-

5. (a) $\diamond$ On a $\forall x \in \mathbb{R}, g_1(x) = e^{-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x^{2i}$.

$\diamond$ On a $\forall t \in \mathbb{R}, e^{t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^{2i}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, g_2(x) = \int_0^x e^{t^2} dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!(2i+1)} x^{2i+1}$.

- (b) $\diamond$ En utilisant le fait que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente, on obtient le résultat suivant : si, pour $i = 1, 2$, g_i est la somme d'une série entière sur $] -R_i, R_i[$ alors $g_1 g_2$ est somme du produit de ces deux séries sur $] -R, R[$ avec $R = \min(R_1, R_2)$.
-

$\diamond$ On a donc, ici, $\forall x \in \mathbb{R}, (g_1 g_2)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \frac{1}{i!(2i+1)} \right) x^{2k+1}$.

$\diamond$ Or $g = g_1 g_2$ donc, par unicité du développement en série entière, on obtient avec le résultat du [4.(e)],

$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!} \frac{1}{i!(2i+1)} = (-4)^k \frac{k!}{(2k+1)!}$ soit $\frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{2i+1} \frac{k!}{(k-i)!i!} = (-4)^k \frac{k!}{(2k+1)!}$.

On a donc bien $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{2i+1} C_k^i = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}$.

* * *
* *
*

Exercice 2

1. Si P est orthogonale, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\|Px\| = \|x\|$ donc pour $P \in O(3)$, $\mathcal{E}(P)$ est la sphère $S(\vec{0}, 1)$.
2. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ alors $\|Dx\|^2 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{(1/\alpha_i)^2}$ car $\forall i, \alpha_i \neq 0$. Donc $\mathcal{E}(D)$ est un ellipsoïde.
3. (i) Soit $B = {}^tAA$, on a ${}^tB = {}^tA({}^tA) = B$ donc B est symétrique et si λ est une valeur propre de B et $x \neq \vec{0}$, un vecteur (colonne) propre associé, on a

$$\lambda \|x\|^2 = \langle x, \lambda x \rangle = \langle x, Bx \rangle = {}^t_x Bx = {}^t_x {}^tA A x = {}^t(Ax) Ax = \|Ax\|^2$$

donc $\lambda = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} > 0$ car $Ax \neq \vec{0}$ puisque A est inversible donc de noyau réduit à $\{\vec{0}\}$.

Donc si $A \in GL_3(\mathbb{R})$ alors tAA est une matrice symétrique définie positive.

- (ii) B est une matrice symétrique réelle donc $\exists Q \in O(3)$, $\exists \Lambda$ diagonale, $B = Q \Lambda Q^{-1}$ avec $\Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de B . Ces valeurs propres sont strictement positives selon [(i)], on peut donc poser $D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ et on a $\Lambda = D^2$. En posant $P = Q^{-1}$, on a donc :
il existe $P \in O(3)$ et D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs telles que ${}^tAA = {}^tP D^2 P$.
- (iii) ${}^tS = {}^tP {}^tD P = S$ et S est semblable à D donc a pour valeurs propres les coefficients diagonaux de D qui sont strictement positifs. Donc S est une matrice symétrique définie positive.
- (iv) S étant définie positif n'a pas 0 comme valeur propre donc est inversible et on peut poser $Q = A S^{-1}$. On a alors ${}^tQQ = {}^t(S^{-1}) {}^tAA S^{-1} = S^{-1} {}^tAA S^{-1} = {}^tP D^{-1} P {}^tP D^2 P {}^tP D^{-1} P = I$ donc Q est orthogonale. Donc $\exists Q \in O(3)$, $A = QS$.
- (v) Donc $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\|Ax\| = \|Sx\|$ et donc $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$.

- (vi) On a aussi $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\|{}^tP D P x\| = \|D P x\|$ puisque ${}^tP \in O(3)$. Donc $x \in \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow \|D P x\| = 1$ et donc $x \in \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow P x \in \mathcal{E}(D)$. En notant $x' = P x$ et $D = \text{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, on a $x \in \mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 x_i'^2 = 1$. Or (x'_1, x'_2, x'_3) sont les coordonnées de x dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ soit ${}^tP = P^{-1}$. Donc $\mathcal{E}(A)$ a pour équation dans le repère $(O, \mathcal{B})$, $\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 x_i'^2 = 1$ avec $\forall i, \alpha_i > 0$ donc $\mathcal{E}(A)$ est un ellipsoïde.

4. (i) Puisque S est définie positif, $\ker S = \{\vec{0}\}$ car 0 n'est pas valeur propre de S . Pour $v \neq \vec{0}$, on peut donc poser $x = \frac{v}{\|S(v)\|}$ et on a $S(x) = \frac{S(v)}{\|S(v)\|}$ donc $\|S(x)\| = 1$ c'est à dire $x \in \mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$. On a donc aussi $\|S'(x)\| = 1$ soit $\frac{\|S'(v)\|}{\|S(v)\|} = 1$ donc $\|S'(v)\| = \|S(v)\|$.

- (ii) Remarquons tout d'abord que l'égalité ci-dessus est triviale pour $v = \vec{0}$ donc $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $\|S'(v)\| = \|S(v)\|$.

On connaît l'égalité de polarisation $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \quad \langle S(v), S(w) \rangle &= \frac{1}{4}(\|S(v) + S(w)\|^2 - \|S(v) - S(w)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|S(v + w)\|^2 - \|S(v - w)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|S'(v + w)\|^2 - \|S'(v - w)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|S'(v) + S'(w)\|^2 - \|S'(v) - S'(w)\|^2) = \langle S'(v), S'(w) \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \langle S(v), S(w) \rangle = \langle S'(v), S'(w) \rangle$.

(iii) Ceci s'écrit aussi, par symétrie de S et S' : $\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \langle S^2(v), w \rangle = \langle S'^2(v), w \rangle$ soit $\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \langle S^2(v) - S'^2(v), w \rangle = 0$. Donc $\forall v \in \mathbb{R}^3, S^2(v) - S'^2(v) \in (\mathbb{R}^3)^\perp = \{\vec{0}\}$ autrement dit $S^2 = S'^2$.

(iv) $\diamond$ Le théorème de décomposition des noyaux s'énonce: si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux de $\mathbb{K}[X]$ alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ker((PQ)(M)) = \ker(P(M)) \oplus \ker(Q(M))$.
Or $X - \alpha$ et $X + \alpha$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$ car, α étant une valeur propre de S définie positive, on a $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Donc on a bien $\ker(S^2 - \alpha^2 I) = \ker(S + \alpha I) \oplus \ker(S - \alpha I)$.

$\diamond$ Mais $-\alpha < 0$ n'est pas valeur propre de S donc $\ker(S + \alpha I) = \{\vec{0}\}$ et $\ker(S^2 - \alpha^2 I) = \ker(S - \alpha I)$.

(v) On constate que, dans la démonstration ci-dessus, l'hypothèse α valeur propre de S n'a servi que pour montrer $\alpha > 0$. On a donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ker(S - \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$.
On en déduit : $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \ker(S - \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I) = \ker(S'^2 - \alpha^2 I) = \ker(S' - \alpha I)$. Donc, pour $\alpha > 0$, $(\ker(S - \alpha I) \neq \{\vec{0}\}) \Leftrightarrow (\ker(S' - \alpha I) \neq \{\vec{0}\})$ ce qui montre que S et S' ont les mêmes valeurs propres. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les valeurs propres distinctes de S et S' ($1 \leq p \leq 3$). Puisque S et S' sont diagonalisables, on a $\mathbb{R}^3 = \bigoplus_{i=1}^p \ker(S - \alpha_i I)$ avec $\ker(S - \alpha_i I) = \ker(S' - \alpha_i I)$. Si $x \in \mathbb{R}^3$ se décompose sur cette somme directe sous la forme $x = \sum_{i=1}^p x_i$, on a donc $S(x) = \sum_{i=1}^p S(x_i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^p S'(x_i) = S'(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $S = S'$.

5. Si $A = VA'$ avec $V \in O(3)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}^3, \|Ax\| = \|A'x\|$ donc $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$.
Réciproquement, pour A inversible, on peut trouver, d'après [3. (iv)] $Q \in O(3)$ et S symétrique définie positive telle que $A = QS$ et alors, selon [3. (v)], $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$. De même, il existe $Q' \in O(3)$ et S' symétrique définie positive telle que $A' = Q'S'$ et $\mathcal{E}(A') = \mathcal{E}(S')$. Si $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')$, on a donc $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$ et donc, suivant [4. (v)], $S = S'$ soit $A = QS = QS' = QQ'^{-1}A'$ avec $QQ'^{-1} \in O(3)$.

Donc pour $(A, A') \in (\text{GL}_3(\mathbb{R}))^2$, on a : $(\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(A')) \Leftrightarrow (\exists V \in O(3), A = VA')$.

* * *
* *
*

Exercice 3

1. (i) $t \mapsto M(t)$ est C^1 sur $[-\pi, \pi]$ et $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $M'(t) = \begin{pmatrix} -5 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc la tangente à $\mathcal{E}$ en $M(t)$ est la droite d'équation $\begin{vmatrix} x - 5 \cos t & -5 \sin t \\ y - 3 \sin t & 3 \cos t \end{vmatrix} = 0$ soit $\underline{(T_t) : 3 \cos t x + 5 \sin t y = 15}$.

(ii) On remarque que $O \notin T_t$ donc, pour tout $P \in T_t$, la droite (OP) existe dirigée par le vecteur $\overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$. Le point P est solution si et seulement si $P \in T_t$ et $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{T_t}$ c'est à dire si et seulement si P est le projeté orthogonal de O sur T_t . D'où l'existence et l'unicité de P .

(iii) À un sommet S de $\mathcal{E}$, la tangente à $\mathcal{E}$ est orthogonale à l'axe (OS) . Comme S appartient à cette tangente, si S est un sommet alors $P = S$.

(iv) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ est orthogonal à T_t donc colinéaire à $\begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}$ donc il existe $\lambda_t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \lambda_t \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}$ et, d'autre part, $P \in T_t$ donc $3 \cos t X(t) + 5 \sin t Y(t) = 15$. On obtient $\lambda_t (9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t) = 15$ soit $\lambda_t = \frac{15}{9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t} = \frac{15}{9 + 16 \sin^2 t}$. Donc $\underline{\begin{cases} X(t) = \frac{45 \cos t}{9 + 16 \sin^2 t} \\ Y(t) = \frac{75 \sin t}{9 + 16 \sin^2 t} \end{cases}}$

2. (i) On a immédiatement :

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$X'(t)$	0	—
$X(t)$	1	$\searrow$ 0

(ii) $\diamond (t \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ et } Y'(t) = 0) \sin t = \frac{3}{4}$ donc $\underline{\exists ! \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[, Y'(\alpha) = 0}$ et on a $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$.

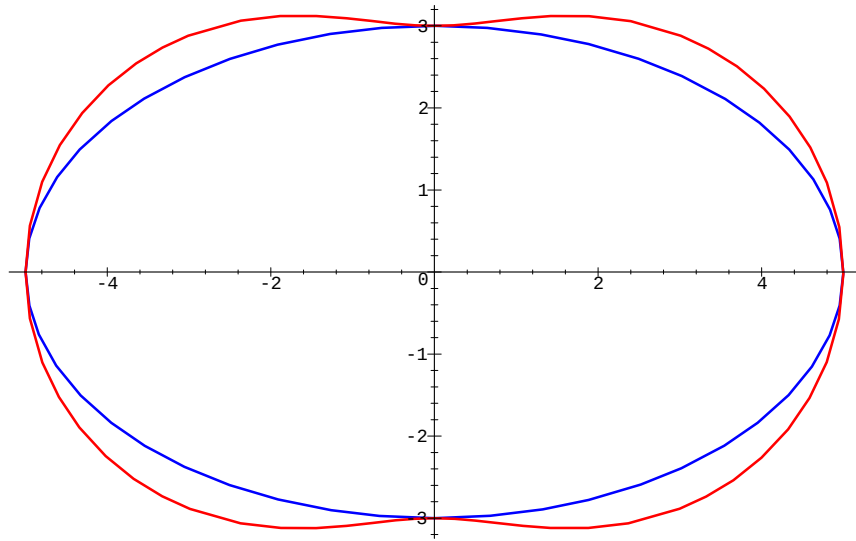
$\diamond \sin^2 \alpha = \frac{9}{16}$, $\sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ donc $\sin^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \alpha < \sin^2 \frac{\pi}{3}$ et $\sin^2$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\underline{\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}}$.

$\diamond$ On a $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ et $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ d'où $\underline{\begin{cases} X(\alpha) = \frac{5}{8} \sqrt{7} \\ Y(\alpha) = \frac{25}{8} \end{cases}}$

(iii) On a donc :

t	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$Y'(t)$	+	0	—
$Y(t)$	0	$\nearrow$ $\frac{25}{8}$	$\searrow$ 3

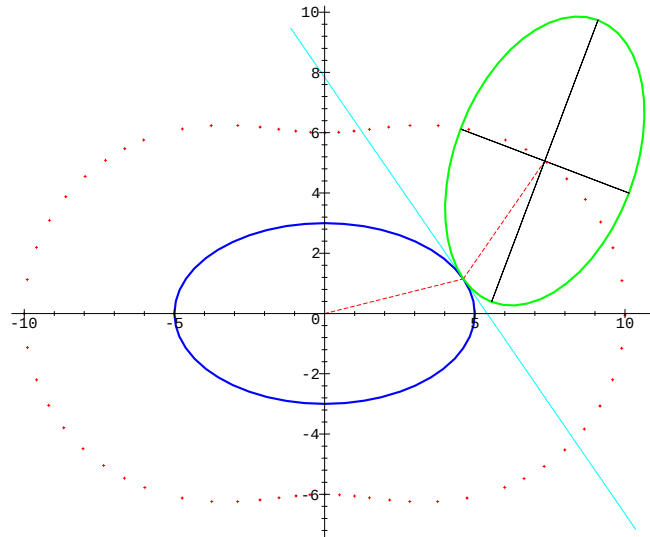
3. On a $\begin{cases} X(t + \pi) = -X(t) \\ Y(t + \pi) = -Y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} X(-t) = X(t) \\ Y(-t) = -Y(t) \end{cases}$ donc il suffit d'étudier l'arc $t \mapsto P_t$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis de le compléter par une symétrie par rapport à O et une symétrie orthogonale par rapport à $(O, \vec{i})$.



4. QUESTION HORS PROGRAMME

Notons S le sommet $S = O + \vec{i}$ de $\mathcal{E}$. À l'instant $\theta = 0$, il coïncide avec le sommet S' de $\mathcal{E}'$. La condition de roulement sans glissement est qu'à l'instant θ les deux ellipses sont en contact en $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}'$ tels que la longueur de l'arc $\widehat{SM}$ soit égale à celle de l'arc $\widehat{S'M'}$. Si on prend comme paramétrage de $\mathcal{E}'$ celui obtenu par la translation τ , c'est à dire, par exemple, que $S' = M'(\pi)$, on a donc que, si à l'instant θ le contact a lieu en $M(t)$ sur $\mathcal{E}$ alors il a lieu en $M'(\pi - t)$ sur $\mathcal{E}'$. Le point $M(\pi - t)$ étant symétrique du point $M(t)$ par rapport à $(O, \vec{j})$, l'angle entre les droites $(OM(\pi - t))$ et $T_{\pi-t}$ est l'opposé, modulo π , de l'angle entre les droites $(OM(t))$ et T_t . D'autre part, c'est aussi l'angle entre les droites $(O'M'(\pi - t))$ et $T'_{\pi-t}$. Comme $T_t = T'_{\pi-t}$ à l'instant θ , les droites $(OM(t))$ et $(O'M'(\pi - t))$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à T_t , donc en particulier, O' est, à l'instant θ , le symétrique de O par rapport à T_t . On a donc $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OP}$ et donc le lieu de O' est l'image de $\mathcal{F}$ par l'homothétie de centre O et rapport 2.

ILLUSTRATION :



* * *
* *
*