CAPES interne de Mathématiques session 2001

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [capesint01e]

EXERCICE 1

QUADRILATÈRES CONVEXES CIRCONSCRITS À UN CERCLE

On se propose, dans cet exercice, d'étudier dans le plan quelques configurations formées de quadrilatères convexes dans chacun desquels est inscrit un cercle, ce qui signifie précisément que ce cercle est inclus dans l'intérieur du quadrilatère et que chacun des côtés de ce dernier est tangent au cercle. On dit aussi dans ce cas que **le quadrilatère est circonscrit au cercle.**

Tous les quadrilatères considérés ici seront supposés tels que deux quelconques de leurs sommets soient distincts et que trois quelconques d'entre eux soient non alignés.

On désignera par $(\mathcal{P})$ le plan euclidien orienté par la donnée d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on notera $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1 dans ce plan.

I. Étude des tangentes au cercle $(\mathcal{C})$.

1. Montrer que $(\mathcal{C})$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ où t appartient à $]-\pi, \pi]$. Comment peut-on interpréter t géométriquement ?

2. En utilisant le paramétrage de $(\mathcal{C})$ obtenu dans la question précédente, déterminer une équation cartésienne de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$. Justifier que cette tangente est la perpendiculaire en M à la droite (OM).

3. Soit Q un point de $(\mathcal{P})$ de coordonnées (p, q).

   a. Discuter suivant les valeurs prises par $p^2 + q^2$ l'existence ou non d'une tangente à $(\mathcal{C})$ passant par Q et préciser le nombre des tangentes passant par Q lorsqu'il en existe. (On pourra utiliser 2, considérer d'abord le cas $q = 0$ et en déduire le cas général,...).

   b. Indiquer, en la justifiant, une construction à la règle et au compas de la (ou des) tangente(s) à $(\mathcal{C})$ passant par Q dans le cas où elle(s) existe(nt).

4. Déterminer l'ensemble des points Q du plan $(\mathcal{P})$ d'où l'on peut mener deux tangentes à $(\mathcal{C})$ qui soient perpendiculaires l'une à l'autre.

II. Étude de parallélogrammes circonscrits à $(\mathcal{C})$.

1. Montrer qu'il existe un unique cercle inscrit dans un losange quelconque donné.

2. On se propose de démontrer que, réciproquement, si ABCD est un parallélogramme circonscrit à un cercle donné (Γ), c'est un losange.

   a. Montrer que pour tout parallélogramme de $(\mathcal{P})$ les bissectrices intérieures issues de deux sommets consécutifs quelconques sont perpendiculaires.

   b. Montrer que si Ω est le centre d'un cercle (Γ) inscrit dans le parallélogramme ABCD, il appartient à la bissectrice intérieure issue de chaque sommet.

   c. En conclure que ABCD est un losange de centre Ω dès qu'il est circonscrit à un cercle de centre Ω.

3. *a.* A étant un point de $(\mathcal{P})$ quelconque, strictement extérieur au cercle $(\mathcal{C})$, montrer qu'il existe un unique parallélogramme direct ABCD circonscrit à $(\mathcal{C})$ et déterminer une construction de ce parallélogramme à la règle et au compas.

   b. Quel est le lieu des points A de $(\mathcal{P})$ tels qu'il existe un carré ABCD circonscrit à $(\mathcal{C})$?

4. *a.* Soit ABCD un losange circonscrit à $(\mathcal{C})$. Montrer que son aire est égale à 2AB.

   b. Réciproquement, montrer que si ABCD est un losange de centre O dont l'aire est égale à 2AB, alors ABCD est circonscrit à $(\mathcal{C})$.

5. Soit ABCD un losange circonscrit à $(\mathscr{C})$. Notons H la projection orthogonale de O sur la droite (AB).
   a. Montrer que $AH \cdot BH = 1$.
   b. Justifier le résultat classique suivant : « Un point M de $(\mathscr{P})$ appartient au segment [AB] si et seulement si on a $MA + MB = AB$ ».
   c. Étudier sur $\mathbf{R}$ la fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
   d. En déduire le lieu des points A de $(\mathscr{P})$ tels que l'aire de ABCD soit minimale parmi celles des parallélogrammes circonscrits à $(\mathscr{C})$.

6. On suppose dans toute cette question que ABCD est un losange direct circonscrit à $(\mathscr{C})$.
   a. Montrer que $OA^2 + OB^2 = OA^2 \cdot OB^2$.
   (On pourra utiliser une équation de la droite (AB) dans un repère adapté,...)
   b. Montrer que si A est donné, B est parfaitement défini comme étant le point vérifiant les deux propriétés suivantes :
   (i) $$OA^2 + OB^2 = OA^2 \cdot OB^2.$$
   (ii) Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est $\dfrac{\pi}{2}$.
   c. Soit un réel $k > 1$. Déterminer l'ensemble décrit par le point B lorsque le point A décrit le cercle de centre O et de rayon k.
   d. Soit un réel $t > 1$. On note $(\mathscr{E})$ l'ensemble des points de $(\mathscr{P})$ de coordonnées (x, y) tels que $x^2 = t^2$. On considère un point A de $(\mathscr{E})$ et on note u une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$.
   Calculer les coordonnées de B en fonction de t et de u. Justifier que le lieu de B lorsque A décrit $(\mathscr{E})$ admet comme axes de symétrie les droites passant par O et dirigées respectivement par $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Montrer que ce lieu est une ellipse privée de deux points que l'on précisera.

III. Étude de quadrilatères convexes circonscrits à $(\mathscr{C})$ qui ne sont pas des parallélogrammes.

1. On suppose dans cette question que ABCD est un quadrilatère convexe qui n'est pas un parallélogramme et qui est circonscrit à un cercle de rayon 1.
   a. Montrer que $AB + CD = AD + BC$.
   b. Montrer que si $\mathscr{A}$ est l'aire de ABCD on a :
   $$\mathscr{A} = AB + CD.$$
   On se propose maintenant de démontrer que, réciproquement, si ABCD est un quadrilatère convexe dont l'aire $\mathscr{A}$ vérifie :
   $$\mathscr{A} = AB + CD = AD + BC,$$
   alors ABCD est circonscrit à un cercle de rayon 1.
   Pour cela on commence par étudier une configuration liée à un triangle.

2. Soit EST un triangle non aplati, Ω le centre du cercle inscrit dans ce triangle, I et J les projetés orthogonaux respectifs de Ω sur les droites (ET) et (ES).
   On considère un point U du segment [ET] et un point V du segment [ES] tel que :
   $$ST + UV = TU + SV.$$
   a. Montrer que l'on ne peut avoir à la fois :
   $$U \in [TI] \text{ et } V \in [SJ].$$
   b. On suppose que $V \in]JE]$ et $U \in [TI[$. Montrer qu'alors on devrait avoir $JV \geq VI$, d'où $V = E$, ce qui conduit à une contradiction.
   c. En déduire $J \in [SV]$ et $I \in [TU]$.
   d. Montrer que STUV est un quadrilatère convexe et que Ω appartient à son intérieur.
   e. Montrer que la droite (UV) est tangente au cercle inscrit dans le triangle EST.

3. Soit maintenant un quadrilatère convexe ABCD tel que $AB + CD = AD + BC$ et que son aire soit égale à $AB + CD$. Déduire de 2. qu'il existe un unique cercle (Γ) de centre Ω et de rayon 1 tel que ABCD soit circonscrit à (Γ). Montrer que $(\Gamma) = (\mathscr{C})$ si et seulement si les bissectrices intérieures de deux sommets consécutifs de ABCD se coupent en O.

Tournez la page S.V.P.

IV. Étude des trapèzes isocèles convexes circonscrits à $(\mathscr{C})$.

Comme il est d'usage, un trapèze sera défini comme un quadrilatère ayant deux côtés parallèles et deux seulement ; ces côtés sont appelés bases du trapèze.

1. On suppose tout d'abord que ABCD est un trapèze isocèle convexe circonscrit à $(\mathscr{C})$ et dont les bases sont [AB] et [CD].

   a. Rappeler, en donnant les justifications nécessaires, quelle est la nature de la composée d'une réflexion de $(\mathscr{P})$ et d'une translation dans la direction orthogonale à celle de l'axe de la réflexion.

   b. On note K_1, K_2, K_3 et K_4 les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Montrer que la perpendiculaire à (AB) en K_1 est axe de symétrie orthogonale de ABCD et contient les points K_3 et O.

   c. Montrer que O est le milieu de $[K_2\,K_4]$.

   d. On note Ω_1 et Ω_2 les milieux respectifs de [AC] et [BD]. Montrer que O est le milieu de $[\Omega_1\,\Omega_2]$.

   On se propose maintenant de reprendre cette étude avec les barycentres.

2. Soit donc un quadrilatère convexe quelconque qui n'est pas un parallélogramme et est circonscrit à $(\mathscr{C})$, notons-le encore ABCD. Notons I_1, I_2, I_3 et I_4 les points de contact de $(\mathscr{C})$ avec [DA], [AB], [BC] et [CD]. Notons de plus Ω_1 et Ω_2 les milieux respectifs de [AC] et [BD]. Posons enfin $x = AI_1$, $y = BI_2$, $z = CI_3$ et $t = DI_4$.

   a. Déterminer les barycentres des systèmes pondérés suivants :

   $$\{(D, x), (A, t)\},\ \{(A, y), (B, x)\},\ \{(B, z), (C, y)\} \text{ et } \{(C, t), (D, z)\}.$$

   b. Montrer que le barycentre du système pondéré :

   $$\{(I_1, t + x), (I_2, x + y), (I_3, y + z), (I_4, z + t)\}$$

   est aussi le barycentre du système pondéré :

   $$\{(\Omega_1, t + y), (\Omega_2, x + z)\}.$$

3. Soient R_1, S_1, T_1 et U_1 les points intersections de $(\mathscr{C})$ avec [OA], [OB], [OC] et [OD] respectivement.

   On définit le vecteur $\vec{\omega}$ par :

   $$2\,\vec{\omega} = (x + y)\,\overrightarrow{OI_2} + (y + z)\,\overrightarrow{OI_3} + (z + t)\,\overrightarrow{OI_4} + (t + x)\,\overrightarrow{OI_1}.$$

   Montrer que :

   $$2\,\vec{\omega} = I_1I_2 \cdot \overrightarrow{OR_1} + I_2I_3 \cdot \overrightarrow{OS_1} + I_3I_4 \cdot \overrightarrow{OT_1} + I_4I_1 \cdot \overrightarrow{OU_1}.$$

4. Soit J_2 le point de $(\mathscr{P})$ tel que le repère $(O, \overrightarrow{OI_2}, \overrightarrow{OJ_2})$ soit orthonormal direct. On se place dans le plan complexe associé à ce repère.

   Soient alors α, β, γ et δ les angles déterminés par :

   $$2\alpha = (\overrightarrow{OI_1}, \overrightarrow{OI_2}),\ \ 2\beta = (\overrightarrow{OI_4}, \overrightarrow{OI_1}),\ \ 2\gamma = (\overrightarrow{OI_3}, \overrightarrow{OI_4}) \ \text{ et } \ 2\delta = (\overrightarrow{OI_2}, \overrightarrow{OI_3}).$$

   a. Déterminer, en fonction de α, β, γ et δ les affixes des points R_1, S_1, T_1 et U_1 ainsi que l'affixe du vecteur $\vec{\omega}$, notée θ.

   b. Montrer que θ est nul et que O est le barycentre du système pondéré :

   $$\{(\Omega_1, t + y), (\Omega_2, x + z)\}.$$

   c. Retrouver comme conséquence que si le quadrilatère convexe ABCD est un trapèze isocèle, alors O est le milieu de $[\Omega_1\,\Omega_2]$. (Cf. IV.1.*c*.)

EXERCICE 2

MARCHE ALÉATOIRE SUR UN TRIANGLE

Remarque : on pourra utiliser les résultats de la partie I, même non démontrés, dans les parties suivantes. Les parties II et III sont indépendantes.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points :

A, d'affixe 1

B, d'affixe $e^{2i\frac{\pi}{3}}$

C, d'affixe $e^{4i\frac{\pi}{3}}$

$\left(i \text{ désignant le nombre complexe de module 1 et d'argument } \frac{\pi}{2}\right)$.

Soit r la rotation de centre O dont l'angle a pour mesure en radians $\frac{2\pi}{3}$.

Par convention, étant donné un sommet quelconque, X, du triangle ABC, on dira que le sommet Y est le sommet suivant de X (ou que Y suit X) si Y = r (X) ; on pourra dire également que X est le sommet précédent de Y (ou que X précède Y). Ainsi : B suit A, C suit B, A suit C. Ou encore : A précède B, B précède C, C précède A.

Un point mobile, M, parcourt aléatoirement le triangle ABC de la façon suivante : soient n un entier naturel et p, q, r trois réels positifs tels que $p + q + r = 1$; si, à l'instant n, le point M se trouve en un sommet donné du triangle ABC, alors, à l'instant $n + 1$:

M se trouvera au sommet suivant avec la probabilité p,
M se trouvera au sommet précédent avec la probabilité q,
M restera au même sommet avec la probabilité r.

Étant donné un sommet quelconque, X, du triangle ABC, on désigne par X_n l'événement : « à l'instant n, le point M se trouve en X », et par $F(X_n)$ la probabilité de cet événement. À l'instant 0, le point M se trouve en A ; on a donc $F(A_0) = 1$, $F(B_0) = 0$, $F(C_0) = 0$.

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement du point M lorsque n tend vers l'infini, dans quelques cas particuliers, puis dans le cas général.

I. Préliminaires.

1. Calculer $F(A_1)$, $F(B_1)$, $F(C_1)$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$F(A_n) + F(B_n) + F(C_n) = 1.$$

3. On pose $a_n = F(A_n)$, $b_n = F(B_n)$, $c_n = F(C_n)$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = r \cdot a_n + q \cdot b_n + p \cdot c_n$$
$$b_{n+1} = p \cdot a_n + r \cdot b_n + q \cdot c_n$$
$$c_{n+1} = q \cdot a_n + p \cdot b_n + r \cdot c_n$$

4. Calculer a_2, b_2, c_2.
5. Étudier le comportement du point M dans les trois cas particuliers suivants :
   a. $r = 1$ (d'où $p = q = 0$)
   b. $p = 1$ (d'où $q = r = 0$)
   c. $p = q = r\left(= \frac{1}{3}\right)$.

II. Étude du cas $p = q$.

A. On se place dans le cas $p = q = \frac{1}{2}$ (et $r = 0$).

1. n étant un entier naturel, on pose :
$$u_n = a_n - b_n,\ v_n = b_n - c_n,\ w_n = c_n - a_n.$$
Démontrer que les suites (u_n), (v_n), (w_n) sont des suites géométriques.

2. Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n uniquement. Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

4. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n uniquement. On admettra que toute suite (a_n) vérifiant
$$2\,a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$
s'écrit
$$a_n = \alpha\, r^n + \beta\, s^n$$
où α, β, r, s sont des nombres réels que l'on déterminera, r et s vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2\, r^{n+2} = r^{n+1} + r^n \qquad 2\, s^{n+2} = s^{n+1} + s^n.$$
Puis étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n).
Que peut-on en conclure pour le comportement du point M ?

B. *Généralisation*. Soit maintenant $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. On se place dans le cas $p = q$ (d'où $r = 1 - 2p$) et on généralise l'étude faite ci-dessus, en utilisant les mêmes notations.

1. Démontrer que les suites (u_n), (v_n), (w_n) sont des suites géométriques.

2. Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n uniquement. Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$a_{n+2} = (p + 2r)\, a_{n+1} + (2p^2 - pr - r^2)\, a_n.$$

4. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n uniquement, puis étudier la convergence des suites (a_n), (b_n), (c_n). Que peut-on en déduire pour le comportement du point M ? (On utilisera, pour le calcul de a_n, une méthode analogue à celle indiquée en A.4.).

III. Étude du cas général.

On suppose ici que p, q, r sont trois réels positifs tels que :
$$p + q + r = 1.$$
On se place dans l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^3$, rapporté à sa base canonique. On pose $V_n = (a_n, b_n, c_n)$ et on considère la matrice :
$$S = \begin{pmatrix} r & q & p \\ p & r & q \\ q & p & r \end{pmatrix}$$
Soit Φ l'application linéaire admettant S pour matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^3$. D'après la partie I, on a donc, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = \Phi(V_n)$.

1. On note j la racine cubique de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive $\left(j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$.
Soient les vecteurs de $\mathbf{C}^3$:
$$u = (1, 1, 1)\ ;\ v = (1, j, j^2)\ ;\ w = (1, j^2, j).$$
a. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbf{C}^3$.
b. Démontrer que l'on a $\Phi(u) = u$, $\Phi(v) = \lambda v$, $\Phi(w) = \mu w$, avec :
$$\lambda = r + qj + pj^2,\ \mu = r + pj + qj^2.$$
c. Démontrer que les modules des nombres complexes λ et μ sont inférieurs ou égaux à 1 (on précisera pour quelles valeurs de p, q, r a lieu l'égalité, ainsi que les valeurs de λ et μ correspondantes).

2. Déterminer les coordonnées (x_0, y_0, z_0) de V_0 dans la base (u, v, w).
3. Calculer a_n, b_n, c_n.
4. Déterminer les limites éventuelles des suites (a_n), (b_n), (c_n) lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on en déduire pour le comportement du point M ?