Corrigé ENS 2012

Corrigé proposé par Martine Ginestet, relu par Francis Denise UPA

Quelques remarques:

Sujet interessant car des retours assez systématiques à la biologie.

Sujet plus court et plus abordable que les années précédentes.

Contrairement à l'énoncé, les parties ne suivent pas un ordre de difficulté croissante.

Le préliminaire et la début de la partie 1 sont bien adaptés. Les questions d'analyse 7,8,9,10,11 sont difficiles. La fin de la partie 1 est interessante pour l'explication du phénomène biologique

Le début de la deuxième partie est facile. La fin est difficile en particulier la question 25. (beaucoup d'inégalités)

En fait les élèves de BCPST ne sont pas des virtuoses en analyse.

La partie 3 sur les polynômes est facile , c'est presque du cours.

La partie 4 est un peu technique du point de vue du calcul , mais à la portée de bons étudiants.

Il y avait donc suffisamment de questions faisables, en analyse ou en algèbre.

Préliminaires

1. $f(x) = bx - a\ln x$
   $f'(x) = b - \dfrac{a}{x} \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq \dfrac{a}{b}$
   Donc

x	0		a/b		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$f(a/b)$	↗	$+\infty$

2. D'aprés le théorème de la bijection, pour $y > f(\dfrac{a}{b})$, l'équation $y = f(x)$ admet deux solutions distinctes :$0 < x_1 < \dfrac{a}{b} < x_2$
   Si $y = f(\dfrac{a}{b})$,l'équation $y = f(x)$ admet une seule solution $x = \dfrac{a}{b}$

Première partie : Equation de Lokta-Volterra classique

3. Si $u(0) \neq \dfrac{\delta}{\gamma} = u^*$, d'aprés le 1., $\gamma u(0) - \delta\ln u(0) > \gamma u^* - \delta \ln u^*$, sinon, $\gamma u(0) - \delta \ln u(0) \geq \gamma u^* - \delta\ln u^*$
   Si $v(0) \neq \dfrac{\alpha}{\beta} = v^*$, d'aprés le 1., $\beta v(0) - \alpha\ln v(0) > \beta v^* - \alpha\ln v^*$, sinon, $\beta v(0) - \alpha \ln v(0) \geq \beta v^* - \alpha \ln v^*$

$$\boxed{\text{Si } u(0) \neq u^* \textbf{ ou } v(0) \neq v^*, \text{ alors } \varepsilon(0) > \gamma u^* - \delta\ln u^* + \beta v^* - \alpha\ln v^*}$$

4. $\forall t \geq 0$, $\varepsilon'(t) = u'(t)\left(\gamma - \delta \dfrac{1}{u(t)}\right) + v'(t)\left(\beta - \alpha \dfrac{1}{v(t)}\right)$
   $\varepsilon'(t) = u(t)\left(\alpha - \beta v(t)\right)\left(\gamma - \delta \dfrac{1}{u(t)}\right) + v(t)\left(\gamma u(t) - \delta\right)\left(\beta - \alpha \dfrac{1}{v(t)}\right)$
   $\varepsilon'(t) = \left(\alpha - \beta v(t)\right)\left(\gamma u(t) - \delta\right) + \left(\gamma u(t) - \delta\right)\left(\beta v(t) - \alpha\right) = 0$
   Donc la fonction ε est constante sur $\mathbb{R}^+$

$$\boxed{\forall t \geq 0,\ \varepsilon(t) = \varepsilon(0)}$$

5. Si il existe $t > 0$ tel que $u(t) = u^*$ et $v(t) = v^*$
   alors d'aprés le 4. $\varepsilon(0) = \varepsilon(t) = \gamma u^* - \delta \ln u^* + \beta v^* - \alpha \ln v^*$
   Et donc d'aprés la question 3. (contraposée), $u(0) = u^*$ **et** $v(0) = v^*$

   Autre démonstration qui n'utilise pas le 4.
   La fonction constante $t \longmapsto (u^*, v^*)$ est solution de (1), et par l'unicité de la solution rappelée dans l'énoncé, elle coincide avec la solution (u, v)

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \gamma x - \delta \ln x + \beta v^* - \alpha \ln v^* = +\infty$
   Donc il existe M_1 tel que, $\forall x \geq M_1,\ \gamma x - \delta \ln x + \beta v^* - \alpha \ln v^* > \varepsilon(0)$
   Or $\beta v(t) - \alpha \ln v(t) \geq \beta v^* - \alpha \ln v^*$ d'aprés le préliminaire,
   Donc si $u(t) \geq M_1, \quad \varepsilon(t) \geq \gamma u(t) - \delta \ln u(t) + \beta v^* - \alpha \ln v^* > \varepsilon(0)$
   De même :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \gamma u^* - \delta \ln u^* + \beta x - \alpha \ln x = +\infty$
   Donc il existe M_2 tel que, $\forall x \geq M_2,\ \gamma u^* - \delta \ln u^* + \beta x - \alpha \ln x > \varepsilon(0)$
   Donc si $v(t) \geq M_2$, $\varepsilon(t) \geq \gamma u^* - \delta \ln u^* + \beta v(t) - \alpha \ln v(t) > \varepsilon(0)$
   Posons $M = max(M_1, M_2)$
   $\boxed{\text{Si } u(t) \geq M \textbf{ ou } v(t) \geq M,\ \varepsilon(t) > \varepsilon(0)}$
   Ceci est impossible car ε est constante d'aprés la question 4.
   et donc $\forall t \geq 0$, $u(t) < M$ **et** $v(t) < M$

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont majorées sur } \mathbb{R}^+}$$

Dans les questions 7,8,9 et 10, on suppose $v(0) = v^*$ et $0 < u(0) < u^*$

7. On suppose que $\forall t > 0$, $v(t) < v^*$

   a) $\forall t > 0, \quad u'(t) = \beta u(t)\left(v^* - v(t)\right) > 0$
      Donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et d'autre part u est majorée donc u admet une limite finie en $+\infty$ notée $u_\infty > 0$

   b) Supposons que $u_\infty \leq u^*$, alors $\forall t > 0$, $0 < u(t) < u_\infty \leq u^*$ car u est strictement croissante
      $v'(t) = \gamma v(t)\left(u(t) - u^*\right) < 0$
      La fonction v est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$
      Fixons un $T > 0$, comme v est strictement décroissante : $\forall t \geq T, \quad v(t) \leq v(T) < v(0) = v^*$
      D'où $v^* - v(t) \geq v^* - v(T) > 0$
      D'autre part u est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\forall t \geq T, \quad u(t) \geq u(T)$
      Posons alors $m = \beta u(T)\left(v^* - v(T)\right)$

$\forall t \geq T, \quad u'(t) = \beta u(t)\,(v^* - v(t)) \geq m$

$$\boxed{\text{Il existe } T > 0, \text{ il existe } m > 0, \forall t \geq T, \quad u'(t) \geq m}$$

Par le théorème des accroissements finis, $\forall t \geq T$, $u(t) - u(T) \geq m(t - T)$
Et on trouve, $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$ ce qui est absurde car u est majorée

c) Supposons que $u_\infty > u^*$
Il existe $\tau > 0$, $\forall t \geq \tau$, $u(t) > u^*$
$\forall t \geq \tau$, $v'(t) = \gamma v(t)\,(u(t) - u^*) > 0$ donc v est strictement croissante sur $[\tau, +\infty[$
Notons $p = \gamma v(\tau)\,(u(\tau) - u^*) > 0$
$\forall t \geq \tau$, $u(t) - u^* \geq u(\tau) - u^* > 0$ car u est croissante et $v(t) \geq v(\tau) > 0$ car v est croissante sur $[\tau, +\infty[$
$\forall t \geq \tau, \; v'(t) \geq p > 0$
Par le théorème des accroissements finis, $\forall t \geq \tau$, $v(t) - v(\tau) \geq p(t - \tau)$
Et on trouve, $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = +\infty$ ce qui est absurde car v est majorée

8. On a trouvé une contradiction au 7b. et au 7.c, cela signifie que l'hypothèse du 7 est fausse et donc

$$\boxed{\text{il existe } t_1 > 0 \text{ tel que } v(t_1) \geq v^*}$$

$v'(0) = \gamma v(0)\,(u(0) - u^*) < 0$
Donc dans un voisinage de 0, v est strictement décroissante.
$\boxed{\text{Il existe donc } t_2 > 0, \forall t \in]0, t_2], \, v(t) < v^*}$
D'aprés le théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{il existe } t_3 > 0 \text{ tel que } v(t_3) = v^*}$
Notons $A = \{t > 0, \, v(t) \geq v^*\}$
A est une partie non vide de $\mathbb{R}^{+*}$ elle admet donc une borne inférieure t_0
$t_0 > 0$ car $t_0 \geq t_2$
$\forall t \in]0, t_0[$, $t \notin A$ d'où $v(t) < v^*$
$\lim\limits_{t \to t_{0-}} v(t) \leq v^*$ et par continuité, $v(t_0) \leq v^*$
D'autre part ,t_0 étant la borne inférieure de A, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers t_0, et on obtient alors par continuité de v, $v(t_0) \geq v^*$

$$\boxed{\text{Il existe } t_0 > 0 \text{ tel que } v(t_0) = v^* \text{ et } \forall t \in]0, t_0[, \, v(t) < v^*}$$

$\forall t \in]0, t_0[$, $u'(t) = \beta u(t)\,(v^* - v(t)) > 0$
u est strictement croissante sur $[0, t_0]$, d'où

$$\boxed{u\,(t_0) > u(0)}$$

9. **Posons** $f(x) = \gamma x - \delta \ln x$ et $g(x) = \beta x - \alpha \ln x$, $\varepsilon(t) = f(u(t)) + g(v(t))$
$\varepsilon(t_0) = \varepsilon(0)$ et $g(v(t_0)) = g(v(0))$ donc $f(u(t_0)) = f(u(0))$
Et comme $u\,(t_0) > u(0)$, alors $\boxed{u(0) < u^* < u\,(t_0)}$ cf tableau de variation dans le préliminaire
Donc dans un voisinage de t_0 , v est croissante donc il existe $t_2 > t_0$ tel que $v(t_2) > v^*$
Supposons que $\forall t > t_0, \quad v(t) > v(t_0) = v^*$
$\forall t > t_0, \quad u'(t) = \beta u(t)\,(v^* - v(t)) < 0$
Alors u est strictement décroissante sur $[t_0, +\infty[$, et minorée, admet donc en $+\infty$ une limite finie u_∞

Si $u_\infty \geq u^*$, en faisant la même démonstration qu'au 7.b,

$\forall t > t_0, \quad v'(t) = \gamma v(t)\left(u(t) - u^*\right) > v(t_0)\left(u_\infty - u^*\right) \geq 0$ et v est croissante sur $[t_0, +\infty[$
Fixons un $T > t_0, \forall t \geq T, \quad u'(t) = \beta u(t)\left(v^* - v(t)\right) \leq \beta u_\infty\left(v^* - v(T)\right) < 0$
En posant $m = \beta u_\infty\left(v^* - v(T)\right)$, on a déterminé $m < 0$ tel que $\forall t \geq T, \quad u'(t) \leq m$
Et on trouvera alors , par le théorème des accroissements finis que que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = -\infty$ ce qui est absurde

Si $u_\infty < u^*$, en faisant la même démonstration qu'au 7.c,
Il existe $\tau > t_0$, $\forall t \geq \tau$, $u(t) < u^*$
$\forall t \geq \tau$, $v'(t) = \gamma v(t)\left(u(t) - u^*\right) < 0$
Notons $p = \gamma v^*\left(u(\tau) - u^*\right) < 0$
$\forall t \geq \tau$, $u(t) - u^* \leq u(\tau) - u^* < 0$ car u est décroissante et d'autre part, $v(t) \geq v^* > 0$
$\forall t \geq \tau, \ v'(t) \leq p < 0$
Et on trouvera alors que que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = -\infty$ ce qui est absurde

L'hypothèse de départ est donc fausse et il existe donc $t_3 > t_0$, tel que $v(t_3) \leq v^*$
Par le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\boxed{\text{il existe } T > t_0, \quad v(T) = v^*}$$

$\varepsilon(t_0) = \varepsilon(T)$ et $g(v(t_0)) = g(v(T))$ d'où $f(u(t_0)) = f(u(T))$
Les deux valeurs $u(t_0)$ et $u(T)$ sont donc de part et d'autre de u^* et comme $u^* < u(t_0)$, alors $u(T) < u^* < u(t_0)$

$$\boxed{u(T) < u(t_0)}$$

10. $\varepsilon(0) = \varepsilon(t_0) = \varepsilon(T)$
$g(v(0)) = g(v(t_0)) = g(v(T)) = g(v^*)$
D'où $f(u(0)) = f(u(t_0)) = f(u(T))$ donc sur les 3 réels, $u(0), u(t_0), u(T)$ il y en a au moins 2 égaux d'aprés le tableau de variation de f.
Or $u(0) \neq u(t_0)$ et $u(t_0) \neq u(T)$

$$\boxed{u(0) = u(T)}$$

11. u_1 et v_1 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et vérifient les équations de Lotka-Volterra
$u_1(0) = u(T) = u_0$ et $v_1(0) = v(T) = v_0$
D'aprés l'unicité admise du couple solution, on en déduit :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad u(t+T) = u(t) \text{ et } v(t+T) = v(t)}$$

Remarque : Les hypothèses $v(0) = v^*$ et $0 < u(0) < u^*$ ne sont a priori valables que dans les questions 7.,8.,9. et 10.. Mais le réel T n'étant pas défini dans les questions 11. et 12. , on admet que les hypothèses restent valables pour ces deux questions.
On pourrait, en reprenant les calculs, montrer qu'on obtient les mêmes résultats de périodicité avec d'autres conditions initiales.

12. (1) donne $\dfrac{u'(t)}{u(t)} = \alpha - \beta v(t)$
En intégrant sur $[0, T]$: $[\ln u(t)]_0^T = \alpha T - \beta \int_0^T v(t)dt = \ln(u(T)) - \ln(u(0)) = 0$
D'où $\dfrac{1}{T} \int_0^T v(t)dt = \dfrac{\alpha}{\beta} = v^*$

Même calculs pour l'autre intégrale

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = v^*, \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = u^*}$$

Ces intégrales correspondent à la valeur moyenne de u et v sur $[0,T]$
Ces valeurs ne dépendent que des valeurs des paramètres et pas des conditions initiales

13. α taux de croissance des proies (lié à la nourriture , la pêche, conditions climatiques...)
    δ taux de mortalité des prédateurs (lié à la pêche, ou conditions climatiques..)
    β taux de prédation
    γ taux de croissance des prédateurs par conversion de leur nourriture (les proies),
    On suppose que la nourriture des proies est en abondance, que les conditions climatologiques, que la pêche ne varie pas sur une période, etc d'où le taux de croissance des proies , le taux de mortalité des prédateurs...ne varie pas au cours du temps.Il faut aussi supposer qu'il n'y a pas de facteur limitant la croissance des proies.

14. La baisse d'intensité de la pêche entraine une augmentation de α (taux de croissance des sardines plus grand) et une diminution de δ (taux de mortalité dû à la pêche des requins plus faible)

15. On a donc une augmentation de v^* et donc une augmentation de la quantité moyenne de requins
    On a une diminution de u^* d'où une diminution de la quantité de proies

16. Si $v(0) = 0$ et $u(0) > 0$, une solution de(1) est : $\begin{cases} \forall t \geq 0,\ v(t) = 0 \\ u(t) = u(0)e^{\alpha t} \end{cases}$
    En l'absence de prédateur, les proies se développent de manière exponentielle. Ce n'est pas réaliste, car il y aura alors une compétition intraspecifique, une limitation due au milieu environnant du nombre de proies.
    Si u$(0) = 0$ et $v(0) > 0$, une solution de(1) est : $\begin{cases} \forall t \geq 0,\ u(t) = 0 \\ u(t) = v(0)e^{-\delta t} \end{cases}$
    En l'absence de proies, la quantité de prédateurs diminue jusqu'à l'extinction

Deuxième partie : Equation avec croissance logistique des proies

17. Comme $u(0) \in [0,K]$,le dénominateur est strictement positif et u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$
    $u'(t) = \dfrac{Ku(0)\,(K-u(0))\,(\alpha e^{-\alpha t})}{\left(u(0)+(K-u(0))\,e^{-\alpha t}\right)^2}$
    $\alpha u(t)\left(1-\dfrac{u(t)}{K}\right) = \alpha K u(0)\dfrac{1}{u(0)+(K-u(0))\,e^{-\alpha t}}\left(1-\dfrac{u(0}{u(0)+(K-u(0))\,e^{-\alpha t}}\right) = \dfrac{Ku(0)\,(K-u(0))\,(\alpha e^{-\alpha t})}{\left(u(0)+(K-u(0))\,e^{-\alpha t}\right)^2}$
    D'où le couple (u,v) tel que $\begin{cases} \forall t \geq 0,\ v(t) = 0 \\ \forall t \geq 0,\ u(t) = \dfrac{Ku(0)}{u(0)+(K-u(0))\,e^{-\alpha t}} \end{cases}$ est solution de (2)
    Et on vérifie $u(0) = u(0)$ et $v(0) = 0$

18. u est croissante, $u(0) > 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = K$

19. En l'absence de prédateur, il y a une régulation du nombre de proies par la compétition interspécifique.

$\alpha\left(1-\dfrac{u}{K}\right)$est le taux de croissance apparent, K est la capacité du milieu environnant limitant la croissance On va tendre vers une stabilité du nombre de proies. Ce modèle est bien plus réaliste.

On suppose dans la suite $K=1$

20. il faut supposer $u^*<1$ ainsi $v^*>0$ et F est bien défini
$F'(t)=\gamma\left(u'(t)-u^*\dfrac{u'(t)}{u(t)}\right)+\beta\left(v'(t)-v^*\dfrac{v'(t)}{v(t)}\right)$
$F'(t)=\gamma\alpha\left(1-u(t)\right)\left(u(t)-u^*\right)-\gamma\beta v(t)\left(u(t)-u^*\right)+\beta\gamma u(t)\left(v(t)-v^*\right)-\delta\beta\left(v(t)-v^*\right)$
$F'(t)=\gamma\alpha\left(1-u(t)\right)\left(u(t)-u^*\right)+\gamma\beta u^*v(t)-\gamma\beta v^*u(t)-\beta\delta\left(v(t)-v^*\right)$
$F'(t)=\gamma\alpha\left(1-u(t)\right)\left(u(t)-u^*\right)+\beta\delta v(t)-\gamma\alpha\left(1-u^*\right)u(t)-\beta\delta v(t)+\delta\alpha\left(1-u^*\right)$
$F'(t)=\gamma\alpha\left(1-u(t)\right)\left(u(t)-u^*\right)-\left(1-u^*\right)\gamma\alpha\left(u(t)-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$
$F'(t)=\gamma\alpha\left(1-u(t)\right)\left(u(t)-u^*\right)-\left(1-u^*\right)\gamma\alpha\left(u(t)-u^*\right)$
$F'(t)=\gamma\alpha\left(u(t)-u^*\right)\left(1-u(t)-1+u^*\right)$

$$\boxed{F'(t)=-\gamma\alpha\left(u(t)-u^*\right)^2}$$

21. Posons $f(x)=x-u^*\ln\left(\dfrac{x}{u^*}\right)-u^*$
$f'(x)=1-\dfrac{u^*}{x}$
D'où le tableau de variation
Et on en déduit $\forall x>0,\ f(x)\geq f(u^*)=0$
De même $g(x)=x-v^*\ln\left(\dfrac{x}{v^*}\right)-u^*$
$\forall x>0,\ g(x)\geq 0$
$\forall t>0,\ F(t)=\gamma f(u(t))+\beta g(v(t))\geq 0$

22. F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et est minorée par 0, elle admet donc une limite finie en $+\infty$ notéeF_∞

23. Même raisonnement qu'au 6.
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, il existe M_1, $\forall x\geq M_1,\ f(x)>\dfrac{F(0)}{\gamma}$
Supposons qu'il existe $t>0$ tel que $u(t)>M_1$, alors $F(t)=\gamma f(u(t))+\beta g(v(t))\geq\gamma f(u(t))>F(0)$
Ceci est contradictoire car F étant décroissante $\forall t\geq 0,\ F(t)\leq F(0)$
Donc $\forall t>0,\ u(t)\leq M_1$ donc u est majorée
On raisonne de la même manière pour v

$$\boxed{u \text{ et } v \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^+}$$

Dans 24 et 25, on suppose qu'il existe une suite (t_n) telle que $\lim t_n=+\infty$ et $(u(t_n))$ et $(v(t_n))$ convergent

24. a) Comme F admet une limite en $+\infty$, par le théorème de limite séquentielle : $F_\infty=\lim F(t_n)$
Si $u_\infty=0$, $F(t_n)\geq\gamma\left(u(t_n)-u^*-u^*\ln\dfrac{u(t_n)}{u^*}\right)\to+\infty$ car $\dfrac{u(t_n)}{u^*}\to 0$

C'est donc contradictoire et donc $u_\infty > 0$
Par un raisonnement identique, $v_\infty > 0$

$$\boxed{u_\infty > 0, \quad v_\infty > 0}$$

b) $F(t+t_n) = \gamma f(u(t+t_n)) + \beta g(v(t+t_n))$
Par passage à la limite, on a bien

$$\boxed{F_\infty = \gamma\left(\widetilde{u}(t) - u^* - u^* \ln \frac{\widetilde{u}(t)}{u^*}\right) + \beta\left(\widetilde{v}(t) - v^* - v^* \ln \frac{\widetilde{v}(t)}{v^*}\right)}$$

c) En utilisant les calculs de dérivation de la question 20. , on en déduit, comme F_∞ est une constante que :

$$\boxed{\forall t > 0, \quad -\gamma\alpha\left(\widetilde{u}(t) - u^*\right)^2 = 0}$$

Donc $\forall t > 0, \quad \widetilde{u}(t) = u^*$ et par continuité, $\widetilde{u}(0) = u^*$

$$\boxed{u_\infty = u^*}$$

On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = u^*$

25. On suppose que $|v_\infty - v^*| = \varepsilon_0 > 0$
a) $v'(t) = \gamma u(t)v(t) - \delta v(t)$
u et v sont bornées (cf 23.) , donc

$$\boxed{v' \text{ est bornée}}$$

b) $v_\infty = \lim v(t_n)$
Il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \quad |v(t_n) - v_\infty| \leq \dfrac{\varepsilon_0}{4}$
$|v(t_n) - v^*| \geq |v_\infty - v^*| - |v(t_n) - v_\infty| \geq \dfrac{3\varepsilon_0}{4}$
D'autre part,v' étant bornée par M sur $\mathbb{R}+$, par la formule des accroissements finis :

$$\forall t, \quad |v(t) - v(t_n)| \leq M\,|t - t_n|$$

Posons $\tau = \dfrac{\varepsilon_0}{M8}$
$|v(t) - v^*| \geq |v(t_n) - v^*| - |v(t) - v(t_n)|$
$\forall t \in [t_n - \tau, t_n + \tau], \quad |v(t) - v(t_n)| \leq M\tau \leq \dfrac{\varepsilon_0}{8}$
$|v(t) - v^*| \geq \dfrac{3\varepsilon_0}{4} - \dfrac{\varepsilon_0}{8} > \dfrac{\varepsilon_0}{2}$

$$\boxed{\text{Il existe } \tau > 0, \quad \text{il existe } n_0, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall t \in [t_n - \tau, t_n + \tau], \quad |v(t) - v^*| > \frac{\varepsilon_0}{2}}$$

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = u^* > 0$
donc il existe $T_1 > 0$, $\forall t \geq T_1, \quad u(t) > \dfrac{u^*}{2}$
$\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha u(t)(1 - u(t)) - \beta u(t)v^* = \alpha u^*(1 - u^*) - \beta u^* v^* = 0$
Donc il existe $T_2 > 0$, $\forall t \geq T_2, \quad |\alpha u(t)(1 - u(t)) - \beta u(t)v^*| < \dfrac{\beta u^* \varepsilon_0}{8}$

Il suffit ensuite de prendre $T = max\,(T_1, T_2)$

$$\boxed{\forall t \geq T, \quad u(t) > \frac{u^*}{2} \text{ et } |\alpha u(t)(1-u(t)) - \beta u(t) v^*| < \frac{\beta u^* \varepsilon_0}{8}}$$

d) On a donc , $\forall t \geq T, \quad |u'(t) + \beta u(t)(v(t) - v^*)| < \dfrac{\beta u^* \varepsilon_0}{8}$
$|u'(t+t_n)| \geq \beta u(t+t_n)\,|v(t+t_n) - v^*| - |u'(t+t_n) + \beta u(t+t_n)(v(t+t_n) - v^*)|$
Il existe $n_1 \geq n_0$, tel que $\forall n \geq n_1, \quad t_n \geq T + \tau$ car $\lim t_n = +\infty$
$\forall n \geq n_1, \quad \forall t \in [-\tau, \tau], \quad t + t_n \geq T$ d'où $|u'(t+t_n) + \beta u(t+t_n)(v(t+t_n) - v^*)| < \dfrac{\beta u^* \varepsilon_0}{8}$
$t + t_n \in [t_n - \tau, t_n + \tau]$, donc $\beta u(t+t_n)\,|v(t+t_n) - v^*| > \beta \dfrac{u^*}{2}\dfrac{\varepsilon_0}{2} = \dfrac{\beta u^* \varepsilon_0}{4}$
D'où $|u'(t+t_n)| > \dfrac{\beta u^* \varepsilon_0}{8}$

$$\boxed{\text{il existe } n_1, \quad \forall n \geq n_1, \quad \forall t \in [-\tau, \tau], \quad , \quad |u'(t+t_n)| > \frac{\beta u^* \varepsilon_0}{8}}$$

e) Par le théorème des accroissements finis
Il existe $c_n \in [t_n, \tau + t_n], \quad u(\tau + t_n) - u\,(t_n) = \tau u'(c_n)$
D'aprés le d., $\forall n \geq n_1 \quad |u'(c_n)| > \dfrac{\beta u^* \varepsilon_0}{8}$

$$\boxed{\forall n \geq n_1, \quad |u(\tau + t_n) - u\,(t_n)| > \frac{\tau \beta u^* \varepsilon_0}{8}}$$

f) Or en passant à la limite
comme $\lim u(\tau + t_n) = \lim u\,(t_n) = u^*$, on obtient $0 \geq \dfrac{\tau \beta u^* \varepsilon_0}{8}$ ce qui est absurde
Il n'existe pas de telle suite (t_n)
D'où l'hypothèse de départ du 25. est fausse

$$\boxed{v^* = v_\infty}$$

On admet comme dans 24, que $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = v^* = v_\infty$

26. Dans ce modèle, il n'y a pas de phénomène périodique comme dans la partie précédente, on a une stabilité asymptotique des proies et des prédateurs.

Troisième partie : Polynômes de degré 3 à coefficients positifs

27. $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$ et P est continue sur $\mathbb{R}$
Par le thm des valeurs intermédiaires ,

$$\boxed{\text{il existe } \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda_1) = 0}$$

28. Comme les coefficients de P sont strictement positifs, $\forall x \geq 0, \quad P(x) \geq a_0 > 0$
Donc P n'admet pas de racine réelle sur $\mathbb{R}^+$,

$$\boxed{\lambda_1 < 0}$$

29. C'est du cours,
$P(\lambda_1)=0$ et $P'(\lambda_1)=0$, alors λ_1 est racine au moins double et P est divisible par $(X-\lambda_1)^2$
Comme le coefficient dominant de P est 1, il existe $\mu \in \mathbb{R}, \quad P(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\mu)$
En développent, $\lambda_1^2\mu=-a_0<0$ d'où $\mu<0$ (erreur d'énoncé)

$$\boxed{\text{il existe } \mu<0, \quad P(x)=(x-\lambda_1)^2(x-\mu)}$$

30. $P'(x)=3x^2+2a_2x+a_1$
$\Delta=4\left(a_2^2-3a_1\right)<0$ donc $\forall x\in\mathbb{R}, \quad P'(x)>0$
P est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, P réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et P admet un unique zéro réel
Dans la suite λ_1 est supposée la seule racine réelle et cette racine est simple

31. Donc P admet une racine non réelle et comme P est à coefficients réels, on sait d'aprés le cours que le conjugué de cette racine complexe est aussi racine de P.
On a 3 racines distinctes, on peut donc factoriser .

$$\boxed{\text{il existe } \lambda_2\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \quad P(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\overline{\lambda_2})}$$

32. En développant et en identifiant les coefficients :
$\begin{cases} -\lambda_1-\lambda_2-\overline{\lambda_2} & =a_2 \\ \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\overline{\lambda_2}+\lambda_2\overline{\lambda_2} & =a_1 \\ -\lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_2} & =a_0 \end{cases}$, puis en utilisant : $\lambda_2\overline{\lambda_2}=|\lambda_2|^2$ et $\lambda_2+\overline{\lambda_2}=2\Re e(\lambda_2)$

$$\boxed{\begin{cases} -\lambda_1-2\Re e(\lambda_2) & =a_2 \\ 2\lambda_1\Re e(\lambda_2)+|\lambda_2|^2 & =a_1 \\ -\lambda_1|\lambda_2|^2 & =a_0 \end{cases}}$$

33. $a_0-a_1a_2=-\lambda_1|\lambda_2|^2+\lambda_1|\lambda_2|^2+2\Re e(\lambda_2)\left(|\lambda_2|^2+2\lambda_1\Re e(\lambda_2)+\lambda_1^2\right)$
$a_0-a_1a_2=\lambda_1^2+2\lambda_1\Re e(\lambda_2)+|\lambda_2|^2$
Considérons $Q(x)=x^2+2x\Re e(\lambda_2)+|\lambda_2|^2$
$\Delta=4\left(\Re e(\lambda_2)^2-|\lambda_2|^2\right)$
$|\lambda_2|^2=\left(\Re e(\lambda_2)^2+\Im m(\lambda_2)^2\right)>\Re e(\lambda_2)^2$ car $\lambda_2\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$
D'où $\Delta<0$ et $\forall x\in\mathbb{R}, \quad Q(x)>0$
$\lambda_1^2+2\lambda_1\Re e(\lambda_2)+|\lambda_2|^2>0$

$$\boxed{a_0-a_1a_2 \text{ et } \Re e(\lambda_2) \text{ ont même signe}}$$

Quatrième partie : Equation à trois populations

34. Il y a trois populations en compétition
u,w,w correspondent respectivement aux effectifs des populations A,B,C
B est un prédateur pour A avec β le taux de prédation de B sur A
α capacité du milieu pour A,$\alpha(1-u)$ taux de croissance apparent
C est un prédateur pour B avec δ le taux de prédation de C sur B
$\dfrac{\gamma}{\beta}$ taux d'efficacité de la conversion de nourriture (A) en croissance de B

$\dfrac{\varepsilon}{\delta}$ taux d'efficacité de la conversion de nourriture (B) en croissance de C
1=taux de mortalité de C
par ex : A= herbage, B=antilopes, C=lions

35. On résout le système :avec conditions supplémentaires $u^* \neq 0, v^* \neq 0, w^* \neq 0$

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ll}\alpha u^*(1-u^*)-\beta u^* v^* & =0\\ \gamma u^* v^*-\delta v^* w^* & =0\\ \varepsilon v^* w^*-w^* & =0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\alpha(1-u^*)-\beta v^* & =0\\ w^* & =\dfrac{\gamma}{\delta}u^*\\ v^* & =\dfrac{1}{\varepsilon}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}u^* & =1-\dfrac{\beta}{\alpha\varepsilon}\\ w^* & =\dfrac{\gamma}{\delta}\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha\varepsilon}\right)\\ v^* & =\dfrac{1}{\varepsilon}\end{array}\right.$$

Comme $\beta < \alpha\varepsilon$, on vérifie bien que l'unique solution est telle que $0<u^* < 1, v^* > 0, w^* > 0$,

36. $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\alpha u - \beta v \\ \gamma v \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \alpha - 2\alpha u^* - \beta v^* = \alpha - 2\alpha u^* - \alpha(1-u^*) = -\alpha u^*$

$\dfrac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\beta u \\ \gamma u - \delta w \\ \varepsilon w \end{pmatrix}$, $\quad \gamma u^* - \delta w^* = 0$

$\dfrac{\partial F}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta v \\ \varepsilon v - 1 \end{pmatrix}$, $\quad \varepsilon v^* - 1 = 0$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -\alpha u^* & -\beta u^* & 0 \\ \gamma v^* & 0 & -\delta v^* \\ 0 & \varepsilon w^* & 0 \end{pmatrix}}$$

37. a) $rg(M) = rg\begin{pmatrix} \boxed{-\alpha u^*} & -\beta u^* & 0 \\ \gamma v^* & 0 & \boxed{-\delta v^*} \\ 0 & \boxed{\varepsilon w^*} & 0 \end{pmatrix} = 3$

M est inversible donc 0 n'est pas valeur propre
Donc s'il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$, alors $\lambda \neq 0$

b) $MX = \lambda X \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}(-\alpha u^*-\lambda)x_1-\beta u^* x_2 & =0\\ \gamma v^* x_1-\lambda x_2-\delta v^* x_3 & =0\\ \varepsilon w^* x_2-\lambda x_3 & =0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\left[(-\alpha u^*-\lambda)\dfrac{\lambda+\dfrac{\varepsilon\delta v^* w^*}{\lambda}}{\gamma v^*}-\beta u^*\right]x_2 & =0\\ x_1 & =\dfrac{\lambda+\dfrac{\varepsilon\delta v^* w^*}{\lambda}}{\gamma v^*}x_2\\ x_3 & =\dfrac{\varepsilon w^*}{\lambda}x_2\end{array}\right.$

$$\boxed{x_1 = \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\lambda + \frac{\varepsilon u^*}{\lambda}\right)x_2, \quad x_3 = \frac{\gamma\varepsilon u^*}{\lambda\delta}x_2}$$

Si $x_2 = 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$ ce qui est contradictoire car $X \neq 0$

38. On en déduit que λ est valeur propre de M si et seulement si $(-\alpha u^* - \lambda)\dfrac{\lambda + \dfrac{\varepsilon\delta v^* w^*}{\lambda}}{\gamma v^*} - \beta u^* = 0 \quad (1)$

$(1) \Longleftrightarrow (\alpha u^* + \lambda)\left(\lambda^2 + \varepsilon\delta v^* w^*\right) + \beta\gamma v^* u^* \lambda = 0$

Pososons $\boxed{P_M(x) = x^3 + \alpha u^* x^2 + (\varepsilon\delta v^* w^* + \beta\gamma u^* v^*)\, x + \alpha\varepsilon\delta u^* v^* w^*}$
P_M est un polynôme à coefficients réels strictement positifs.

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } M \text{ si et seulement si } P_M(\lambda) = 0}$$

39. Si P admet 3 racines réelles alors ces valeurs sont strictement négatives et $\lambda = \Re e(\lambda) < 0$
Sinon, $P_M(x) = (x - \lambda_1)\,(x - \lambda_2)(x - \overline{\lambda_2})$
$\lambda_1 < 0$
$a_0 - a_1 a_2 = \alpha\varepsilon\delta u^* v^* w^* - \alpha u^*\,(\varepsilon\delta v^* w^* + \beta\gamma u^* v^*) = -\alpha u^* \beta\gamma u^* v^* < 0$
D'aprés le 33., $\Re e(\lambda_2)$ a le même signe que $a_0 - a_1 a_2$
D'où $\Re e(\lambda_2) = \Re e(\overline{\lambda_2}) < 0$
Dans les deux cas :
$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est valeur propre de } M \text{ ,alors } \Re e(\lambda) < 0}$$

40. $a_2^2 - 3a_1 = \alpha^2 u^{*2} - 3\,(\varepsilon\delta v^* w^* + \beta\gamma u^* v^*)$
$a_2^2 - 3a_1 = \alpha^2 u^{*2} - 3\gamma u^* - 3\gamma \dfrac{\beta}{\varepsilon} u^*$
$a_2^2 - 3a_1 = u^* \left[\alpha^2 \left(1 - \dfrac{\beta}{\alpha\varepsilon}\right) - 3\gamma - 3\gamma\dfrac{\beta}{\varepsilon}\right]$
$a_2^2 - 3a_1 = u^* \left[\left(\alpha^2 - 3\gamma\right) - \dfrac{1}{\varepsilon}\beta\,(\alpha + 3\gamma)\right] < 0$
D'aprés la question 30, P_M admet une unique racine réelle

41. M est une matrice d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes complexes, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
Il existe une matrice D=diag$(\lambda_1, \lambda_2, \overline{\lambda_2})$ il existe Q inversible telle que
$$\boxed{M = QDQ^{-1}}$$
Soit U solution de $U'(t) = MU(t)$

42. Posons $f(u, v, w) = \alpha u(1 - u) - \beta uv$
Alors, $f(u, v, w) - f(u^*, v^*, w^*) \backsim < grad(f), U >$ avec $U = \begin{pmatrix} u - u^* \\ v - v^* \\ w - w^* \end{pmatrix}$
En faisant la même chose pour les 2 autres lignes, on trouve :
$F(u, v, w) - F(u^*, v^*, w^*) \backsim MU$ et $F(u^*, v^*, w^*) = 0$
Or $U' = F(u, v, w) \backsim MU$
Donc si u est proche de u^*, et v est proche de v^* et w est proche de w^*, l'équation (5) permettra de déterminer une approximation des solutions de (3)

43. a) $V' = QU' = QMU = QMQ^{-1}QU = DV$

b) On est ramené à des équations différentielles simples car D est diagonale
Posons $V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$V' = DV \iff \begin{cases} x'(t) &= \lambda_1 x(t) \\ y'(t) &= \lambda_2 y(t) \\ z'(t) &= \overline{\lambda_2} z(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) &= Ae^{\lambda_1 t} \\ y(t) &= Be^{\lambda_2 t} \\ z(t) &= Ce^{\overline{\lambda}_2 t} \end{cases}, \text{ avec } \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = V(0)$$

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ car $\lambda_1 < 0$
$|y(t)| = |A|\, e^{\Re e(\lambda_2)t}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ car $\Re e(\lambda_2) < 0$
Idem $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} \|V(t)\| = 0$

d) $U(t) = Q^{-1}V(t)$
Par opération sur les limites, on obtient : $\lim\limits_{t\to+\infty} \|U(t)\| = 0$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} u(t) = u^*, \quad \lim_{t\to+\infty} v(t) = v^*, \quad \lim_{t\to+\infty} w(t) = w^*}$$

On a donc montré que si on peut remplacer l'équation (3) par l'équation (5), alors on tend vers un régime permanent

44. Cf sur Google "Equations différentielles Ordinaires" de Tony Lelièvre (2009-2010)
Point asymptotiquement stable par fonction de Lyapunov

Annexe : démonstration des résultats admis en 24.et 25. (par Francis Denise)

Les fonctions u et v sont bornées, donc de la suite $(u(n), v(n))_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite convergente $(u(\varphi(n)), v(\varphi(n)))$

On a donc bien une suite (t_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ et $(u(t_n))$ et $(v(t_n))$ convergent

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u(t_n) = u_\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v(t_n) = v_\infty$

On note $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ l'unique solution de (2) vérifiant : $\widetilde{u}(0) = u_\infty$ et $\widetilde{v}(0) = v_\infty$

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons les fonctions $u_n{:}t \longmapsto u(t+t_n), v_n{:}t \longmapsto v(t+t_n)$

Les fonctions u et v étant bornées sur $\mathbb{R}^+$ ainsi que leur dérivées , les fonctions u_n et v_n sont bornées par un réel indépendant de n, ainsi que leur dérivées.

Notons $A = \{(u_n, v_n), n \in \mathbb{N}\}$

1) A est un ensemble de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, équicontinu car il existe k tel que les fonctions sont k-lipchitziennes (inégalité des accroissements finis)

2) Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, L'ensemble $A(x) = \{(u_n(x), v_n(x)), n \in \mathbb{N}\}$ est borné donc relativement compact

Par le théorème d'Ascoli, A est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}^+$

Il existe donc un suite extraite $\left(u_{\psi(n)}, v_{\psi(n)}\right)$ convergeant vers (U, V) uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$

Les fonction U et V sont donc continues sur $\mathbb{R}^+$

D'autre part : $\left(u_{\psi(n)}, v_{\psi(n)}\right)$ est solution du système différentiel (2) avec comme conditions initiales :
$u_{\psi(n)}(0) = u(t_{\psi(n)})$ et $v_{\psi(n)}(0) = v(t_{\psi(n)})$
D'où $u_{\psi(n)}(t) - u_{\psi(n)}(0) = \int_0^t \alpha u_{\psi(n)}(s)\left(1 - u_{\psi(n)}(s)\right) - \beta u_{\psi(n)}(s) v_{\psi(n)}(s) ds$
Par le théorème de convergence dominée, $U(t) - U(0) = \int_0^t \alpha U(s)\left(1 - U(s)\right) - \beta U(s)V(s) ds$
D'où U est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $U'(t) = \alpha U(t)\left(1 - U(t)\right) - \beta U(t)V(t)$
De même pour V
Donc (U, V) est solution de (2) avec comme conditions initiales :$U(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{\psi(n)}(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} u(t_{\psi(n)}) = u_\infty$ et $V(0) = v_\infty$

D'aprés l'unicité d'une telle solution : $U = \widetilde{u}$ et $V = \widetilde{v}$

Supposons maintenant que la suite (u_n, v_n) admette un autre valeur d'adhérence (V, W), par l'unicité de la solution , $(V, W) = (U, V) = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$

On en conclut que la suite admet une et une seule valeur d'adhérence et comme $\{(u_n, v_n), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact, on a :

(u_n, v_n) converge vers $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ uniformément sur tout compact

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n \to +\infty} u(t + t_n) = \widetilde{u}(t) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} v(t + t_n) = \widetilde{u}(t)}$$

Si on suppose que u ne tend pas vers u^* quand t tend vers $+\infty$, il existe $K > 0$ et il existe une suite (s_n) telle que $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$ et $|u(s_n) - u^*| \geq K$

la suite $(u(s_n), v(s_n))$ étant bornée , on peut en extraire une suite convergente de limite (w_∞, z_∞) v. On aura $|w_\infty - u^*| \geq K$

Mais d'aprés le 24.c. , on montre que $w_\infty = u^*$ et c'est donc contradictoire :

On en conclut que $\boxed{\lim_{t \to +\infty} u(t) = u^*}$

De même dans la question 25, on a montré que $v_\infty = v^*$, on en déduit par le même raisonnement que $\boxed{\lim_{t \to +\infty} v(t) = v^*}$