concours externe de recrutement de professeurs certifiés

première composition de mathématiques

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude du rayon minimum des disques d'un plan affine euclidien contenant k points à coordonnées entières.

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatif, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On établit une bijection entre P et $\mathbb{C}$ en associant à chaque point de P son affixe dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et on appelle point entier tout point de P dont l'affixe appartient à $\mathbb{Z}[i]$.

Pour $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $M_0 \in P$, on appelle disque de centre z_0 (respectivement M_0) et de rayon r l'ensemble $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$ (respectivement $D(M_0, r) = \{M \in P \mid M_0M \leqslant r\}$).

Si E est un ensemble fini, on note card(E) son cardinal et, pour tout entier k, $k \geqslant 2$, on désigne par r_k le réel, s'il existe, défini par : $r_k = \min\{r > 0 \mid \exists z_0 \in \mathbb{C},\ \mathrm{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(z_0, r)) \geqslant k\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier relatif vérifiant $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

I. Détermination de r_2, r_3 et r_4.

I.1. Soit M et M' deux points entiers distincts. Montrer que $MM' \geqslant 1$.
En déduire que, si M et M' appartiennent tous deux à $D(M_0, r)$, alors $2r \geqslant 1$.

I.2. Montrer que r_2 existe et vaut $\frac{1}{2}$.

I.3.

I.3.1. En considérant le triangle OAB où A et B ont pour affixes respectives 1 et i, montrer que, si r_3 existe, alors $r_3 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

I.3.2. Soit C et D deux points entiers distincts et différents de O. Montrer que l'une au moins des distances OC, OD ou CD est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$.

I.3.3. Déterminer r_3.

I.4. Montrer que, si r_4 existe, on a $r_4 \geqslant r_3$. En considérant les points O, A, B introduits en I.3.1. et le point d'affixe $1 + i$, déterminer r_4.

II. Quelques résultats préliminaires.

II.1. Dans toute cette question, A, B et C désignent trois points non alignés de P. On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, $\hat{A}$ la mesure comprise entre 0 et π de l'angle en A de ce triangle, a, b, c les longueurs BC, CA et AB.

II.1.1. Montrer que $R = \dfrac{a}{2 \sin \hat{A}}$.

II.1.2. Exprimer $\cos \hat{A}$, puis R^2 en fonction de a, b et c.

II.1.3. Montrer que, si A, B et C sont des points entiers, R^2 est un rationnel.

II.2. Soit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, et $D(O, r)$ le disque de centre O et de rayon r. Le but de cette question est de montrer que la fonction définie par $r \mapsto \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r))/r^2$ admet une limite lorsque $r \to +\infty$ et de déterminer cette limite.

II.2.1. Montrer que, si z est l'affixe d'un point entier contenu dans D(O, r), alors $-r \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant r$ et $-r \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant r$.

II.2.2. Soit n un entier, $0 \leqslant n \leqslant [r]$. Montrer que le nombre des points entiers d'abscisse n contenus dans $D(O, r)$ est $1 + 2\left[\sqrt{r^2 - n^2}\right]$.

II.2.3. En déduire que : $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r)) = 1 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \left[\sqrt{r^2 - n^2}\right]$ puis que :

$$-4[r] - 3 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2} \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r)) \leqslant 1 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2}.$$

II.2.4. Montrer que la fonction définie par $r \mapsto \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2}/r^2$ a pour limite $I = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$ lorsque $r \to +\infty$. Calculer I et conclure.

III. **Existence de r_k et rationalité de r_k^2.**

Dans cette partie, k est un entier supérieur ou égal à 3.

III.1. Montrer que l'ensemble $A_k = \{ r > 0 \mid \exists z_0 \in \mathbb{C},\ \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(z_0, r)) \geqslant k \}$ admet une borne inférieure strictement positive m_k.

III.2. Montrer que : pour tout entier k, $k \geqslant 3$, $m_{k+1} \geqslant m_k$.

III.3. Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A_k de limite m_k.

III.3.1. Montrer qu'il existe une suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $0 \leqslant \operatorname{Re}(\zeta_n) < 1$, $0 \leqslant \operatorname{Im}(\zeta_n) < 1$ et $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta_n, \rho_n)) \geqslant k$.

III.3.2. Montrer qu'il existe une suite extraite $(\zeta_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un nombre complexe ζ.

III.3.3. Montrer que $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta, m_k)) \geqslant k$. En déduire l'existence de r_k.

III.4. Soit D_k un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers, ω_k son centre et Γ_k le cercle de centre ω_k et de rayon r_k.

III.4.1. Montrer que Γ_k contient au moins un point entier.

III.4.2. Montrer que, si Γ_k ne contenait qu'un point entier M_k, il existerait un point ω'_k intérieur au segment $[\omega_k, M_k]$ tel que $D(\omega'_k, \omega'_k M_k)$ contiendrait au moins k points entiers. En déduire que Γ_k contient au moins deux points entiers.

III.4.3. Montrer que, si Γ_k ne contient que deux points entiers, ils sont diamétralement opposés sur Γ_k.

III.4.4. Montrer que r_k^2 est rationnel (on utilisera II.1.3.).

III.5. **Application.**

III.5.1. Soit D_k un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers. Montrer qu'il existe un disque D'_k, de centre ω'_k, de rayon r_k, contenant au moins k points entiers, tel que le point O appartienne au cercle Γ'_k, de centre ω'_k, de rayon r_k, et que tous les points entiers contenus dans Γ'_k aient une ordonnée supérieure ou égale à 0.

III.5.2. Soit D'_k un disque vérifiant les propriétés précédentes. On suppose que Γ'_k ne contient que deux points entiers et que k est strictement supérieur à 4. Montrer que r_k est supérieur ou égal à 1.

III.5.3. Soit encore D'_k un disque vérifiant les propriétés précédentes. On suppose que Γ'_k contient au moins trois points entiers et que k est strictement supérieur à 4. Montrer que r_k est supérieur ou égal à 1.

III.5.4. Déterminer les valeurs de r_5 et de r_6.

IV. Une majoration de r_k.

Soit n un entier naturel non nul.
On pose $n\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in (n\mathbb{Z})^2\}$.

IV.1. Montrer que la relation définie sur $\mathbb{Z}[i]$ par :

$$(a + ib)\mathcal{R}(a' + ib') \Leftrightarrow (a + ib) - (a' + ib') \in (n\mathbb{Z})^2$$

est une relation d'équivalence.

IV.2. Quel est le cardinal de $\mathbb{Z}[i]/\mathcal{R}$?

IV.3. Montrer que, pour tout entier k, $k \geqslant 2$, πr_k^2 n'est pas un entier.

IV.4. On suppose que r est un réel positif tel que πr^2 n'est pas un entier. Montrer que, pour n assez grand, D(O, nr) contient au moins $[\pi r^2]n^2 + 1$ points entiers et que, parmi ces points, il en existe $[\pi r^2] + 1$ qui appartiennent à la même classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

IV.5. Soit $z_0, \ldots, z_{\pi r^2}$ les affixes de ces $[\pi r^2] + 1$ points entiers.

IV.5.1. Montrer que $\frac{z_0}{n}, \ldots, \frac{z_{\pi r^2}}{n}$ sont les affixes de points de D(O, r) vérifiant :

pour tout entier j, $0 \leqslant j \leqslant [\pi r^2]$, $\frac{(z_j - z_0)}{n} \in \mathbb{Z}[i]$.

IV.5.2. Soit ω le point d'affixe $\frac{-z_0}{n}$. Montrer que le disque D(ω, r) contient au moins $[\pi r^2] + 1$ points entiers.

IV.6. Soit k un entier, $k \geqslant 2$, α un réel, $0 < \alpha < 1$, et r_α le réel positif tel que : $\pi r_\alpha^2 = k - 1 + \alpha$. Montrer que $r_k \leqslant r_\alpha$.

En déduire que : pour tout entier k, $k \geqslant 2$, $r_k \leqslant \sqrt{\frac{k-1}{\pi}}$.

V. Une minoration de r_k.

Dans toute cette partie, D_k désigne un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers, dont le centre ω_k a pour affixe z_k. On suppose de plus $0 \leqslant \mathrm{Re}(z_k) < 1$ et $0 \leqslant \mathrm{Im}(z_k) < 1$.

À tout élément $x + iy$ de $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $x > 0$ et $y > 0$ on associe le carré dont les sommets ont pour affixes respectives $x + iy$, $x - 1 + iy$, $x - 1 + i(y - 1)$ et $x + i(y - 1)$.

À tout élément $x + iy$ de $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $xy \neq 0$ on associe le carré obtenu comme image du carré construit comme ci-dessus à partir de $|x| + i|y|$ par la symétrie (par rapport à O ou par rapport à l'un des axes) qui transforme le point d'affixe $|x| + i|y|$ en le point d'affixe $x + iy$.

V.1. Montrer l'existence d'un tel disque D_k.

V.2. Soit M un point entier de D_k dont l'affixe $x + iy$ vérifie $xy \neq 0$ et $(x - 1)(y - 1) \neq 0$. Montrer que le carré associé est contenu dans D_k.

V.3. En comparant l'aire de D_k à la somme des aires des carrés ainsi définis, montrer que $\pi r_k^2 \geqslant k - 8[r_k]$.

En déduire que : pour tout entier k, $k \geqslant 2$, $r_k \geqslant \frac{-4 + \sqrt{16 + k\pi}}{\pi}$.

VI. Conclusion.

Montrer que r_k est équivalent à $\sqrt{\frac{k}{\pi}}$ lorsque $k \to +\infty$.