

Préliminaires

Soit λ valeur propre de A , symétrique positive, associée au vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $X^*AX = \lambda X^*X = \lambda \|X\|^2$. Comme $\|X\|^2 > 0$ (car $X \neq 0$) et $X^*AX \geq 0$, on en déduit que $\lambda \geq 0$. A étant symétrique réelle, elle possède n valeurs propres réelles.

Donc une matrice symétrique réelle positive possède n valeurs propres réelles positives.

On montre de même que :

une matrice symétrique réelle définie positive possède n valeurs propres réelles strictement positives.

Partie I - Norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I.A.. Posons , pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Si $\|x\| = 1$,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |(Ax)_i| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}}_{\|x\|=1} = \|L_i\|.$$

En posant L_i la i -ième

ligne de la matrice A . Notons $M = \max_{i=1..n} L_i$.

Alors $\|Ax\| = \left(\sum_{k=1}^n (Ax)_k^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n M^2 \right)^{1/2} = M\sqrt{n}$. D'où :

$\sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ a bien un sens et on peut poser $N(A) = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Pour $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1 et $\left\| \frac{Ax}{\|x\|} \right\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq N(A)$. Donc $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ existe et vérifie

$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq N(A)$ (car $\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ est le plus petit des majorants des $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$)

Si $\|x\| = 1$, $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \Rightarrow N(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$ (là encore par définition de la

borne supérieure). D'où :

$$\boxed{N(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

D'où l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Ax\| \leq N(A) \|x\|$.

I.B.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $N(A) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$. l'endomorphisme canoniquement associé à A étant nul, $A = 0$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors pour tout x de \mathbb{R}^n de norme 1, $\|(\lambda A)x\| = |\lambda| \|Ax\| \Rightarrow$
 $\sup_{\|x\|=1} \|(\lambda A)x\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ et $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$

- Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\|x\| = 1$, $\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq N(A) + N(B)$

D'où $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$ ($N(A+B)$ est le plus petit des majorants des $\|(A+B)x\|$ pour $\|x\| = 1$)

On a montré que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En outre $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \|x\| = 1 \Rightarrow \|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq N(A) \|Bx\| \leq N(A)N(B)$

D'où :

$$\boxed{N(AB) \leq N(A)N(B)}$$

I.C. Posons $x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \dot{1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ (pour $i = 1..n$). L'on a $\|x_i\| = 1$ et

$\|[c_1, \dots, c_n] x_i\| = \|c_i\| \leq N([c_1, \dots, c_n])$. Donc :

$$\boxed{N([c_1, \dots, c_n]) \geq \max_{i=1..n} \|c_i\|}$$

I.D. D'après I.C., $N([0, \dots, 0, v]) \geq \|v\|$.

En outre si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est de norme 1, $[0, \dots, 0, v] x = \begin{pmatrix} v_1 x_n \\ \vdots \\ v_n x_n \end{pmatrix} = x_n \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = x_n v$.

D'où $\|[0, \dots, 0, v] x\| = |x_n| \|v\| \Rightarrow \|[0, \dots, 0, v] x\| \leq \|v\|$ (car $|x_n| \leq \|x\| = 1$)

Donc $N([0, \dots, 0, v]) \leq \|v\|$ et :

$$\boxed{N([0, \dots, 0, v]) = \|v\|}$$

I.E. $(A^*A)^* = A^*A \Rightarrow A^*A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles)

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^*(A^*A)X = (AX)^*(AX) = \|AX\|^2 \geq 0$. Donc $A^*A \geq 0$ et :

$$\boxed{A^*A \text{ est symétrique positive.}}$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A^*A et E_1, \dots, E_p les sous-espaces propres respectifs de A^*A . Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Posons $X = \sum_{k=1}^p X_k$ avec $X_k \in E_k$. On a alors :

$$\begin{aligned} \|AX\| &= \sqrt{X^*A^*AX} = \sqrt{\langle X, A^*AX \rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle \sum_{k=1}^p X_k, \sum_{k=1}^p \lambda_k X_k \right\rangle} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^p \lambda_k \|X_k\|^2} \text{ (car les } X_k \text{ sont 2 à 2 orthogonaux)} \\ &\leq \sqrt{\varrho(A^*A)} \sqrt{\sum_{k=1}^p \|X_k\|^2} = \sqrt{\varrho(A^*A)} \|X\| = \sqrt{\varrho(A^*A)}. \text{ D'où :} \end{aligned}$$

$$\underline{N(A) \leq \sqrt{\varrho(A^*A)}}$$

Soit X vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre $\sqrt{\varrho(A^*A)}$ de A^*A . Alors :

$$\|AX\| = \sqrt{X^*A^*AX} = \sqrt{\langle X, A^*AX \rangle} = \sqrt{\varrho(A^*A)} \|X\| = \sqrt{\varrho(A^*A)}. \text{ D'où :}$$

$\underline{\sqrt{\varrho(A^*A)} \leq N(A)}$. On a montré :

$$\boxed{N(A) = \sqrt{\varrho(A^*A)}}$$

I.F. Vérifions que la norme d'une matrice A symétrique réelle est égale à $\max_{\lambda \in \text{Spec}(A)} |\lambda| = \varrho(A)$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et E_1, \dots, E_p les sous-espaces propres associés.

Soit X de \mathbb{R}^n de norme 1 et posons $X = \sum_{k=1}^p X_k$ avec $X_k \in E_k$.

$$\|AX\| = \left\| \sum_{k=1}^p AX_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^p \lambda_k X_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 \|X_k\|^2} \text{ (d'après le théorème de Pythagore)}$$

$$\leq \varrho(A) \sqrt{\sum_{k=1}^p \|X_k\|^2} = \varrho(A). \text{ D'où } N(A) \leq \varrho(A).$$

Soit X de \mathbb{R}^n de norme 1 associé à une valeur propre λ de plus grande valeur absolue. Alors $\|AX\| = \|\lambda X\| = \varrho(A) \|X\| = \varrho(A)$. D'où $N(A) \geq \varrho(A)$. Ce qui prouve : $\underline{N(A) = \varrho(A)}$

En particulier : $N(A^*A) = \varrho(A^*A)$
Comme $\varrho(A^*A) = N(A)^2$, on a montré :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(A^*A) = N(A)^2}$$

Partie II - Conditionnement

II.A. Posons $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|_\infty = \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}|$. Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme équivalente à N car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. d'où $\exists \alpha > 0, \|\cdot\|_\infty \leq \alpha N$.
On en déduit que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N(A) < 1, \forall k \in \mathbb{N}$,
 $\|A^k\|_\infty \leq \alpha N(A^k) \leq \alpha N(A)^k$, ce qui montre que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$,
 $|(A^k)_{i,j}| \leq \alpha N(A)^k$ et donc que (A^k) tend vers 0 et que $\sum_{k \geq 0} (A^k)_{i,j}$ est une série numérique absolument convergente. D'où :

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \left(\sum_{k=0}^m (A^k)_{i,j} \right)$ est une suite convergente, ce qui montre que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=0}^m A^k \right) = (S_m) \text{ converge vers une matrice } U.}$$

L'on $\forall m \in \mathbb{N}, (I_n - A) S_m = S_m (I_n - A) = I_n - A^{m+1}$. En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :
 $(I_n - A) U = U (I_n - A) = I_n$. D'où :

$$\boxed{I_n - A \text{ est inversible et } (I_n - A)^{-1} = U = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k}$$

II.B. $A(I_n - A^{-1}(A - B)) = A - (A - B) = B$. Donc :

$A^{-1}B = I_n - A^{-1}(A - B)$. Or $A^{-1}B$ n'est pas inversible, d'où $\exists Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $A^{-1}BY = 0$ et $\|Y\| = 1$.

On a alors $A^{-1}BY = Y - A^{-1}(A - B)Y \Rightarrow$

$$A^{-1}(A - B)Y = Y \Rightarrow$$

$$\|A^{-1}(A - B)Y\| = \|Y\| = 1 \Rightarrow$$

$$N(A^{-1}(A - B)) \geq 1 \Rightarrow$$

$$1 \leq N(A^{-1}(A - B)) \leq N(A^{-1})N(A - B) \text{ (ce qui montre que } N(A - B) \text{ est non nul)}$$

D'où $N(A) \leq N(A)N(A^{-1})N(A - B) \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{N(A)}{N(A - B)} \leq \text{cond}(A)}$$

II.C. $A - M = [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, p(c_n)]$; or $p(c_n) \in \text{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$, donc $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, p(c_n))$ est liée et $A - M$ n'est pas inversible

D'après la question précédente, en posant $B = A - M$, l'on a :

$$\text{cond}(A) \geq \frac{N(A)}{N(M)} \geq \frac{\|c_1\|}{\|v\|} \text{ (en utilisant les questions I.C. et I.D.); Donc :}$$

$$\boxed{\text{cond}(A) \geq \frac{\|c_1\|}{\|v\|}}$$

Partie III - Matrices de type VDM

IIIA Par définition, $p(X^{n-1}q)$ réalise le minimum de la distance de $X^{n-1}q$ à H . D'où :

$$\|X^{n-1}q - p(X^{n-1}q)\| = \min_{u \in H} \|X^{n-1}q - u\| \Rightarrow$$

$$\boxed{\forall u \in H, \|v\| \leq \|X^{n-1}q - u\|}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, unitaire; alors $P = X^{n-1} + Q$ où $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et, si l'on désigne maintenant par X la matrice $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$:

$\|P(X)q\| = \|X^{n-1}q - (-Q)(X)q\|$. Or $(-Q)(X)q \in \text{Vect}(q, Xq, \dots, X^{n-2}q) = H$ et d'après la question précédente :

$$\boxed{\|v\| \leq \|P(X)q\|}$$

III.B. L'on a vu, dans la question II.C. que, comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\text{cond}(A) \geq \frac{\|c_1\|}{\|v\|} \text{ où } c_1, \dots, c_n \text{ désignent les colonnes de } A, p \text{ est le projecteur orthogonal sur } \text{Vect}(c_1, \dots, c_{n-1})$$

et $v = c_n - p(c_n)$. Ici $c_1 = q$ et $\text{Vect}(c_1, \dots, c_{n-1}) = H = \text{Vect}(q, Xq, \dots, X^{n-2}q)$. D'où :

$$\text{cond}(A) \geq \frac{\|q\|}{\|v\|} \geq \frac{\|q\|}{\|P(X)q\|} \text{ où } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \text{ unitaire.}$$

Or $\|P(X)q\| \leq N(P(X))\|q\|$ (d'après I.A.) et $P(X) \neq 0$ (car sinon $X^{n-1}q \in H$ et $A \notin GL_n(\mathbb{R})$).

$$\text{Donc } \text{cond}(A) \geq \frac{1}{N(P(X))}. \text{ or } N(P(X)) = \max_{\lambda \in \text{Spec}(P(X))} |\lambda| \text{ (question I.F.)}$$

En outre, $P(X) = \begin{pmatrix} P(x_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(x_n) \end{pmatrix}$ et $\text{Spec}(P(X)) = \{P(x_1), \dots, P(x_n)\}$.

$$\text{Donc : } \max_{\lambda \in \text{Spec}(P(X))} |\lambda| = \max\{|P(x_1)|, \dots, |P(x_n)|\} \leq \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \text{ car } x_1, \dots, x_n \in [-1, 1].$$

On a donc montré :

$$\boxed{\text{cond}(A) \geq \frac{1}{\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|}}$$

III.C. L'on a bien $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_0(\cos \theta) = 1$ et $T_1(\cos \theta) = \cos \theta$

Supposons que, pour $k \in \{0, \dots, n\}, n \geq 1, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_k(\cos \theta) = \cos k\theta$ (hypothèse de récurrence).

Alors $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \times T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta)$

$$= 2 \cos \theta \times \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

$$= (\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta) - \cos(n-1)\theta$$

$$= \cos(n+1)\theta \text{ et la propriété est donc vraie au rang } n+1. \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos \theta) = \cos n\theta}$$

Soit $x \in [-1, 1]$; posons $\theta = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos \theta$ et $\theta \in [0, \pi]$.

On a alors $T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos n\theta \Rightarrow |T_n(x)| \leq 1$. L'on a montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \leq 1}$$

III.D. L'on a $d^\circ T_0 = 0, d^\circ T_1 = 1$. Une récurrence simple montre que $d^\circ T_n = n$.

Le coefficient dominant de T_1 est 1. Une récurrence simple montre que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, d^\circ T_n = n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^{n-1}.}$$

III.E. D'après la question précédente, $\frac{T_{n-1}}{2^{n-2}}$ est de degré $n-1$, unitaire. Donc, d'après III.B. :

$$\text{cond}(A) \geq \frac{1}{\sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{T_{n-1}(x)}{2^{n-2}} \right|} \geq 2^{n-2} \text{ (d'après III.C.)}$$

On a montré :

$$\boxed{\text{cond}(A) \geq 2^{n-2}}$$

Partie IV - Matrices de Hankel

IV.A. Notons b_1, \dots, b_n les colonnes de B . Elles forment une base b de \mathbb{R}^n .

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on sait former une base $q = (q_1, \dots, q_n)$ orthonormée telle que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{Vect}(b_1, \dots, b_i) = \text{Vect}(q_1, \dots, q_i)$.

Soit Q la matrice $[q_1, q_2, \dots, q_n]$. Alors q orthonormée $\Leftrightarrow Q$ orthogonale.

Si l'on pose $e = (e_1, \dots, e_n)$, B est la matrice de passage de e à b , Q est la matrice de passage de e à q et Q^{-1} est la matrice de passage de q à e . Donc BQ^{-1} est la matrice de passage de q à b . Posons $R = BQ^{-1}$. Alors R est inversible car c'est la matrice de passage de q à b .

La i -ième colonne de R est formée des composantes de b_i dans la base q . Comme $\forall i \in \{1, \dots, n\}, b_i \in \text{Vect}(q_1, \dots, q_i)$, R est triangulaire supérieure. Donc :

$$\boxed{B = QR \text{ avec } Q \in O(n) \text{ et } R \text{ triangulaire supérieure inversible}}$$

IV.B. On sait qu'il existe $P \in O(n)$ telle que $A' = P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ & \ddots \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix}$ et comme A est définie positive, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i > 0$.

Posons $B' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & (0) \\ & \ddots \\ (0) & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $A = PA'P^* = PB'^2P^* = PB'P^*PB'P^*$.

Posons $B = PB'P^*$. Alors $B^* = B$ et :

$$\boxed{A = B^*B \text{ avec } B \in GL_n(\mathbb{R})}$$

D'après IV.A., il existe $Q \in O(n)$ et R triangulaire supérieure inversible telles que $B = QR$. D'où : $A = R^*Q^*QR = R^*R$ (car $Q^{-1} = Q^*$).

Donc :

$$\boxed{A = R^*R \text{ avec } R \text{ triangulaire supérieure inversible}}$$

$$\text{IV.C. L'on a } \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle c_i, c_j \rangle = \frac{1}{r_{11}^2} \left\langle \begin{pmatrix} r_{1i} \\ \vdots \\ r_{ii} \\ (0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1j} \\ \vdots \\ r_{jj} \\ (0) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{r_{11}^2} \sum_{k=1}^{\min(i,j)} r_{ki} r_{kj}.$$

Or $A = R^*R$; d'où $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{ij} = \alpha_{i+j-1} = \sum_{k=1}^n r_{ik}^* r_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} r_{ki} r_{kj}$. donc :

$$\boxed{\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \langle c_i, c_j \rangle = \frac{\alpha_{i+j-1}}{r_{11}^2}}$$

D'où : $\forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, $\langle c_{i+1}, c_j \rangle = \frac{\alpha_{i+j}}{r_{11}^2}$ et $\langle c_i, c_{j+1} \rangle = \frac{\alpha_{i+j}}{r_{11}^2}$, ce qui montre :

$$\boxed{\forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}, \langle c_{i+1}, c_j \rangle = \langle c_i, c_{j+1} \rangle}$$

IV.D. R étant triangulaire supérieure et inversible, $r_{11}^{-1}R$ l'est aussi :

- $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $c_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$
- ses colonnes c_1, \dots, c_{n-1} sont linéairement indépendantes

Comme $\dim \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = n-1$, (c_1, \dots, c_{n-1}) est une base de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et

$$\boxed{\text{Vect}(c_1, \dots, c_{n-1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})}$$

IV.E. On a donc $(c_1, \dots, c_{n-1}, e_n)$ est une base de \mathbb{R}^n .

Analyse : si l'on désigne par T l'application associée à la matrice T , on a $T(c_1) = c_2$, $T(c_2) = c_3$, $T(c_{n-1}) = c_n$ et $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$, $\langle T(e_n), c_i \rangle = \langle T^*(e_n), c_i \rangle$

$$= e_n^* T c_i \\ = e_n^* c_{i+1} = 0 \text{ car } e_n \in \text{Vect}(c_1, \dots, c_{n-1})^\perp$$

Donc $T(e_n) \in \text{Vect}(c_1, \dots, c_{n-2})^\perp = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-2})^\perp = \text{Vect}(e_{n-1}, e_n)$. On peut donc poser :

$$T(e_n) = \lambda e_{n-1} + \mu e_n.$$

On a alors :

$$\langle T(e_n), c_{n-1} \rangle = \langle \lambda e_{n-1} + \mu e_n, c_{n-1} \rangle = \lambda \langle e_{n-1}, c_{n-1} \rangle \text{ et } \langle T^*(e_n), c_{n-1} \rangle = \langle e_n, T(c_{n-1}) \rangle = \langle e_n, c_n \rangle$$

$$\text{D'où } \lambda = \frac{\langle e_n, c_n \rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1} \rangle}$$

$$\text{Enfin : } \langle T(e_n), e_n \rangle = \mu \text{ et } \langle T^*(e_n), e_n \rangle = \langle e_n, T(e_n) \rangle = \mu$$

Synthèse : soit T l'endomorphisme de \mathbb{R}^n défini par :

$$T(c_1) = c_2, \dots, T(c_{n-1}) = c_n, T(e_n) = \frac{\langle e_n, c_n \rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1} \rangle} e_{n-1} \text{ (j'ai choisi } \mu = 0)$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k c_k + \lambda_n e_n$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle T(e_n), x \rangle &= \left\langle T(e_n), \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k c_k + \lambda_n e_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \langle T(e_n), c_k \rangle + \lambda_n \langle T(e_n), e_n \rangle \\ &= \lambda_{n-1} \left\langle \frac{\langle e_n, c_n \rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1} \rangle} e_{n-1}, c_{n-1} \right\rangle + \lambda_n \left\langle \frac{\langle e_n, c_n \rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1} \rangle} e_{n-1}, e_n \right\rangle \\ &= \lambda_{n-1} \langle e_n, c_n \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle T^*(e_n), x \rangle &= \left\langle e_n, \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k T(c_k) + \lambda_n T(e_n) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \langle e_n, c_{k+1} \rangle + \lambda_n \langle e_n, T(e_n) \rangle \\ &= \lambda_{n-1} \langle e_n, c_n \rangle + \lambda_n \left\langle e_n, \frac{\langle e_n, c_n \rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1} \rangle} e_{n-1} \right\rangle \\ &= \lambda_{n-1} \langle e_n, c_n \rangle \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle T(e_n), x \rangle = \langle T^*(e_n), x \rangle \Rightarrow T(e_n) = T^*(e_n)$$

On a donc montré :

$$\boxed{\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, T(c_k) = c_{k+1} \text{ et } T(e_n) = T^*(e_n).}$$

IV.F. On a alors $r_{11}^{-1}R = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ avec $c_1 = e_1$, $c_2 = Tc_1 = Te_1$ et par une récurrence simple : $c_k = T^{k-1}c_1 = T^{k-1}e_1$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$. Donc :

$$\boxed{r_{11}^{-1}R = [e_1, Te_1, \dots, T^{n-1}e_1]}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{0, \dots, n-2\}, \langle T(T^i(e_1)), T^j(e_1) \rangle &= \langle T(c_{i+1}), c_{j+1} \rangle = \langle c_{i+2}, c_{j+1} \rangle \text{ et} \\ \langle T^*(T^i(e_1)), T^j(e_1) \rangle &= \langle c_{i+1}, T(c_{j+1}) \rangle = \langle c_{i+1}, c_{j+2} \rangle \text{ D'après IV.C.,} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i, j \in \{0, \dots, n-2\}, \langle T(T^i(e_1)), T^j(e_1) \rangle = \langle T^*(T^i(e_1)), T^j(e_1) \rangle}$$

Rédigé par

*Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, allée Chaptal, 22000 StBrieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace