Fonctions à variations bornées

Introduction

Dans ce problème, on s'intéresse aux *fonctions à variations bornées*. Cette notion a été introduite en 1881 par Jordan [1] pour étendre un théorème de Dirichlet [2] sur la convergence des séries de Fourier [3]. Il est composé de sept parties A, B, C, D, E, F et G.

Dans la partie A on établit quelques propriétés élémentaires relatives aux fonctions à variations bornées. En introduction de la partie B, on définit une notion de longueur bornée et de longueur pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Son objectif est d'établir des propriétés générales sur cette notion : une inégalité triangulaire, une relation de Chasles... Dans la partie C on établit l'équivalence entre "être de longueur bornée sur tout segment" et "être à variations bornées". La partie D se consacre au cas des fonctions de classe C^1. On y démontre qu'elles sont toujours de longueur bornée et on donne une formule pour calculer leur longueur. La partie E s'intéresse au cas des fonctions périodiques. La partie F est consacrée à l'étude d'un exemple. Dans la partie G, on étend les définitions et les propriétés présentées précédemment aux cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Sauf mentions contraires explicitées dans le texte, les parties de ce sujet ne sont pas *a priori* indépendantes.

Notations et définition

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \subseteq \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{R}^n$. Pour tout $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$ et $B \subseteq A$, $f|_B$ désigne la restriction de f à B.

• Dans tout le problème, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

• **Pour $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on dit que f est à variations bornées lorsqu'il existe $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ croissante et $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ décroissante telles que $f = g + h$.**

A. Premières propriétés

A1 Établir que toute fonction monotone définie sur I est à variations bornées.

A2a Montrer que l'ensemble des fonctions à variations bornées définies sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

A2b Établir que ce sous-espace est engendré par l'ensemble des fonctions croissantes sur I.

Dans la fin de cette partie, on considère $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction à variations bornées, et a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

A3 Soit $\alpha \in I$. Démontrer qu'il existe $k \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ croissante et $l \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ décroissante telles que $f = k + l$ et $k(\alpha) = 0$.

[1] Camille Marie Ennenmond Jordan, mathématicien français, Lyon 1838 – Paris 1922.
[2] Gustav Peter Dirichlet, mathématicien allemand, Düren 1805 – Göttingen 1859.
[3] Joseph Jean-Baptiste Fourier, mathématicien français, Auxerre 1768 – Paris 1830.

A4 On écrit $f = g + h$ avec g croissante sur I et h décroissante sur I. Prouver que :

$$g(b) - g(a) \geqslant f(b) - f(a) \geqslant h(b) - h(a).$$

A5 Montrer que f est bornée sur le segment $[a, b]$.

A6 Établir qu'en tout point intérieur à I, la fonction f admet une limite à droite et une limite à gauche.

B. Fonctions de longueur bornée

Soient a et b dans I avec $a < b$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On rappelle qu'une subdivision σ de $[a, b]$ est une suite finie, strictement croissante, qu'on peut noter $(\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$, et vérifiant $\sigma_0 = a$ et $\sigma_p = b$.

Pour $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ une subdivision de $[a, b]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\ell(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{i=p} |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|.$$

On dit que f est de longueur bornée sur le segment $[a, b]$ lorsqu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout σ subdivision de $[a, b]$ on ait $\ell(\sigma, f) < \Lambda$. Si f est de longueur bornée sur $[a, b]$, on définit alors $L_a^b(f)$, la longueur de a à b de f, par :

$$L_a^b(f) = \sup_\sigma \{\, \ell(\sigma, f) \mid \sigma \textbf{ est une subdivision de } [a, b] \,\}.$$

De plus, on pose également $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$ et $L_a^a(f) = 0$.

Dans cette partie, on considère f et g dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et a, b, c trois éléments de I tels que $a < c < b$.

B1 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que :

$$L_a^b(f) \geqslant 0.$$

B2 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant L_a^b(f).$$

B3 On suppose que f et g sont de longueur bornée sur $[a, b]$. Établir que $f + g$ est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f + g) \leqslant L_a^b(f) + L_a^b(g).$$

B4 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. On considère une subdivision $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ de $[a, b]$ et on pose :

$$\begin{cases} q = \max\{\, j \in \{0, \cdots, p\} \mid \sigma_j < c \,\} \\ r = \min\{\, j \in \{1, \cdots, p\} \mid \sigma_j > c \,\} \end{cases}$$

B4a Justifier l'existence de q et de r.

On définit alors les suites finies σ' et σ'' par :

$$\begin{cases} \sigma'_j = \sigma_j \text{ si } j \in \{0, \dots, q\} \\ \sigma'_{q+1} = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma''_0 = c \\ \sigma''_j = \sigma_{j+r-1} \text{ si } j \in \{1, \dots, p-r+1\} \end{cases}$$

B4b Montrer que σ' est une subdivision de $[a, c]$ et que σ'' est une subdivision de $[c, b]$.

B4c Montrer que $\ell(\sigma, f) \leqslant \ell(\sigma', f) + \ell(\sigma'', f)$.

B4d Prouver que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f) \leqslant L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

B5 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et on considère une subdivision quelconque σ' de $[a, c]$ et une subdivision quelconque σ'' de $[c, b]$.

B5a Démontrer qu'il existe une subdivision de $[a, b]$, notée σ, telle qu'on ait

$$\ell(\sigma, f) = \ell(\sigma', f) + \ell(\sigma'', f).$$

B5b Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et que :

$$L_a^b(f) \geqslant L_a^c(f) + L_c^b(f).$$

B6 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur tout segment de I. Soient α, β, γ dans I, établir l'égalité :

$$L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f) = L_\alpha^\gamma(f).$$

C. Lien entre "être de longueur bornée" et "être à variations bornées"

On considère $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

C1 Soient a et b dans I avec $a < b$.

C1a Soit $q \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction monotone. Prouver que q est de longueur bornée sur $[a, b]$ et qu'on a :

$$L_a^b(q) = |q(b) - q(a)|.$$

C1b On suppose que f est une fonction à variations bornées. Montrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$.

C2 On suppose que f est de longueur bornée sur tout segment de I. On choisit λ dans I et on définit alors les fonctions g et h, pour tout $t \in I$, par :

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + L_\lambda^t(f)\right) \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - L_\lambda^t(f)\right)$$

Prouver que g est croissante sur I et que h est décroissante sur I.

C3 En déduire que f est à variations bornées si et seulement si f est de longueur bornée sur tout segment de I.

D. Cas des fonctions de classe C^1

On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ de classe C^1 sur I. *Le but de cette partie est de montrer que f est de longueur bornée sur tout segment de I et que pour tous α et β dans I on a*

$$L_\alpha^\beta(f) = \int_\alpha^\beta |f'(t)| \mathrm{d}t.$$

D1 Soient u et v dans I avec $u < v$, établir que $|f(u) - f(v)| \leqslant \int_u^v |f'(t)| \, \mathrm{d}t$.

D2 Soient a et b dans I avec $a < b$.

D2a Soit σ une subdivision de $[a, b]$. Établir que $\ell(\sigma, f) \leqslant \int_a^b |f'(t)| \, \mathrm{d}t$.

D2b Démontrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que

$$L_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t.$$

D3 Soient a et b dans I avec $a < b$, et soit un réel $\varepsilon > 0$.

D3a Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ une subdivision de $[a, b]$, tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et pour tout x et y éléments de $[\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ on ait

$$|f'(x) - f'(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

D3b Prouver que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ il existe $c_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$ tel que

$$|f'(c_i)|(\sigma_i - \sigma_{i-1}) = |f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})|.$$

D3c En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a

$$|f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})| \geqslant \int_{\sigma_{i-1}}^{\sigma_i} |f'(t)| \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon(\sigma_i - \sigma_{i-1})}{b - a}.$$

D3d Établir que

$$\ell(\sigma, f) \geqslant \int_a^b |f'(t)| \mathrm{d}t - \varepsilon.$$

D4 Conclure.

D5 Établir que f est à variations bornées.

E. Cas des fonctions périodiques

Dans cette partie on s'intéresse aux fonctions périodiques à variations bornées. On y utilise certains résultats de la partie A. Par ailleurs, les résultats de cette partie ne sont pas utilisés dans les autres parties.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $[x]$ la partie entière de x. On rappelle que $[x]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

On rappelle également que la fonction partie entière est croissante. On considère $T \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit la fonction p sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = \left[\dfrac{x}{T}\right]$.

E1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x - p(x)T \in [0, T[$.

E2 Pour a et b deux réels tels que $a \leqslant b$, établir que :

$$p(a) = p(b) \quad \text{ou} \quad p(a) + 1 \leqslant p(b).$$

E3 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction périodique de période T. On suppose que $f|_{[0,T]}$ est à variations bornées. On peut donc écrire $f|_{[0,T]} = k + l$ avec $k \in \mathcal{F}([0,T], \mathbb{R})$ croissante, $l \in \mathcal{F}([0,T], \mathbb{R})$ décroissante et $k(0) = 0$ (d'après A3). Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{aligned} g(x) &= p(x)k(T) + k\left(x - p(x)T\right) \\ h(x) &= f(x) - g(x). \end{aligned}$$

E3a Justifier que les fonctions g et h sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

E3b Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. Montrer que $g(a) \leqslant g(b)$.

E3c Montrer que pour tout réel x on a : $h(x) = -p(x)k(T) + l\big(x - p(x)T\big)$.

E3d Montrer que pour tout $u \in [0, T]$ on a $l(0) \geqslant l(u) \geqslant l(0) - k(T)$.

E3e Prouver finalement que f est à variations bornées.

E4 On considère la fonction

$$\psi : x \longmapsto \frac{1}{x - [x] - 1}$$

E4a Montrer que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique de période 1.

E4b Parmi les trois fonctions $\psi|_{[0,1[}, \psi|_{[0,1]}$ et ψ, quelles sont celles qui sont à variations bornées ? On justifiera chacune des réponses.

Dans la fin de cette partie, on considère la fonction φ définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = |\sin x| + \sin x.$$

E5 Donner, sans justification, la représentation graphique de $\varphi|_{[-2\pi, 2\pi]}$ dans un repère qu'on choisira.

E6 Montrer que φ est à variations bornées.

E7 D'après A3 et E6, on peut écrire $\varphi = g + h$ avec $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ croissante vérifiant $g(0) = 0$ et $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ décroissante.

E7a Établir que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(2n\pi) + 2 \leqslant g\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.
(Indication : On pourra utiliser A4.)

E7b En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n\pi) \geqslant n$.

E7c Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$?

E7d En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

F. Un exemple de fonction dérivable et bornée mais non à variations bornées

Les premières questions de cette partie peuvent se traiter indépendamment des parties précédentes.

On étudie dans cette partie certaines propriétés de la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

F1a Étudier la parité de f.

F1b Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x réel.

F1c La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

F1d Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

F1e En déduire que f est bornée.

F2 Montrer que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{4n+1}{4n-1}\right)$ $(n \geqslant 1)$ est divergente.

F3 On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_n = \sqrt{\dfrac{2}{(2n-1)\pi}}$

F3a Vérifier que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et est de limite nulle.

F3b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir que

$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t} \left|\cos \frac{1}{t^2}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\sqrt{\frac{4}{(4n+1)\pi}}}^{\sqrt{\frac{4}{(4n-1)\pi}}} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t.$$

F3c Prouver alors que la série de terme général $\displaystyle\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t} \left|\cos \frac{1}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ $(n \geqslant 1)$ est divergente.

F3d En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{u_1} \frac{1}{t} \left|\cos \frac{1}{t^2}\right| \mathrm{d}t$ est divergente.

F4a Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

F4b Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 |f'(t)|\, \mathrm{d}t$?

F5 Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $ab \leqslant 0$. Prouver que f n'est pas de longueur bornée sur $[a, b]$.

F6 Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Démontrer que l'application $f|_J$ est à variations bornées si et seulement si $0 \notin J$.

G. Généralisation au cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on considère un entier $n \geqslant 2$ et on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique ; la norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée est donc définie, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2}.$$

On peut prolonger la définition introduite au début de la partie B, de fonction de longueur bornée aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :

Etant données a et b dans I avec $a < b$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, pour $\sigma = (\sigma_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ une subdivision de $[a, b]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\ell(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{i=p} \|f(\sigma_i) - f(\sigma_{i-1})\| .$$

On dit que f est de longueur bornée sur le segment $[a, b]$ lorsqu'il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout σ subdivision de $[a, b]$ on ait $\ell(\sigma, f) < \Lambda$. Si f est de longueur bornée sur $[a, b]$, on définit alors $L_a^b(f)$, la longueur de a à b de f, par :

$$L_a^b(f) = \sup_{\sigma} \{\, \ell(\sigma, f) \mid \sigma \text{ est une subdivision de } [a, b] \,\}.$$

De plus, on pose également $L_b^a(f) = -L_a^b(f)$ et $L_a^a(f) = 0$.

Dans cette partie, on considère deux éléments a et b de I tels que $a < b$, et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note f_i la i-ième composante de f. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ (on remarquera que $f_i \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$).

G1 Soit R un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si f est de longueur bornée sur $[a, b]$ alors $R \circ f$ l'est aussi sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(R \circ f) = L_a^b(f).$$

G2 On suppose que f est de longueur bornée sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction f_i est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f_i) \leqslant L_a^b(f).$$

G3 On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est de longueur bornée sur $[a, b]$. Démontrer que f est de longueur bornée sur $[a, b]$ et que :

$$L_a^b(f) \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} L_a^b(f_i).$$

G4 Démontrer que f est de longueur bornée sur tout segment de I si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est à variations bornées.

G5 On suppose maintenant que f est de longueur bornée sur tout segment de I. Soient α, β, γ dans I. Établir l'égalité :

$$L_\alpha^\beta(f) + L_\beta^\gamma(f) = L_\alpha^\gamma(f).$$

Dans toute la suite, on suppose que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ est de classe C^1 sur I et on rappelle que :

$$\forall t \in I,\ f'(t) = \big(f_1'(t), \dots, f_n'(t)\big).$$

G6 Prouver que f est de longueur bornée sur tout segment de I.

G7 Soit T un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $T \circ f$ est de classe C^1 sur I et que $(T \circ f)' = T \circ f'$.

G8 On définit la fonction w, pour $x \in I$, par $w(x) = L_a^x(f)$ et on considère $t \in I$.

G8a Montrer qu'il existe $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$ et $f'(t) = \|f'(t)\|\,\vec{u}$.

G8b Prouver qu'il existe R un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$R(\vec{u}) = (1, 0, \dots, 0).$$

On pose alors $g = R \circ f$ et $(g_1, \dots, g_n) = g$.

G8c Montrer que g est de classe C^1 sur I et établir que :

$$g_1'(t) = \|f'(t)\| \quad \text{et} \quad \forall i \in \{2, \dots, n\},\ g_i'(t) = 0.$$

G8d Montrer que g est de longueur bornée sur tout segment de I.

G8e Soit $v \in \mathbb{R}^*$ tel que $t + v \in I$, prouver que

$$\frac{1}{v} L_t^{t+v}(g_1) \leqslant \frac{1}{v} L_t^{t+v}(f) \leqslant \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{i=n} L_t^{t+v}(g_i).$$

G8f En déduire que w est dérivable en t et que $w'(t) = \|f'(t)\|$.

G9 Établir que :

$$L_a^b(f) = \int_a^b \|f'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

G10 Soit $h \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^n)$ une fonction de classe C^1 sur $[a, b[$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h'(t)\,\mathrm{d}t$ soit absolument convergente. On veut montrer que h est de longueur bornée sur $[a, b]$ et exprimer $L_a^b(h)$. On considère $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

G10a Prouver que $h|_{[a,b[}$ admet une limite finie en b. On notera H cette limite.

G10b Soit $x \in [a, b]$. Montrer que :

$$\|h(x) - h(b)\| \leqslant \|H - h(b)\| + \int_x^b \|h'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

G10c Soit σ une subdivision de $[a, b]$. Établir que :

$$\ell(\sigma, h) \leqslant \|H - h(b)\| + \int_a^b \|h'(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

G10d Montrer qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$\|H - h(b)\| - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \|h(d) - h(b)\| - \int_d^b \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

G10e Montrer qu'il existe une subdivision σ' de $[a, d]$ telle que :

$$\int_a^d \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \ell(\sigma', h).$$

G10f Montrer qu'il existe une subdivision, σ'' de $[a, b]$ telle que :

$$\|H - h(b)\| + \int_a^b \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t - \varepsilon \leqslant \ell(\sigma'', h).$$

G10g Conclure.

G11 Soit $h \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^n)$ telle que h soit de classe C^1 sur $[a, b[$ et que l'intégrale $\int_a^b h'(t) \, \mathrm{d}t$ ne soit pas absolument convergente. Soit $A \in \mathbb{R}$.

G11a Démontrer qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que $\int_a^c \|h'(t)\| \, \mathrm{d}t > A + 1$.

G11b Montrer qu'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que $\ell(\sigma, h) > A$.

G11c Prouver que h n'est pas de longueur bornée sur $[a, b]$.

FIN DE L'ÉPREUVE