

X-ENS PSI 2018

Un corrigé

1 Existence et unicité des solutions de (1)

1. Le problème (1bis) est un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continus et le coefficient devant la dérivée seconde ne s'annule pas. Sur l'intervalle $[0, 1]$, le théorème de Cauchy linéaire indique qu'il y a une unique solution v_λ . Comme $v_\lambda'' = cv_\lambda - f$ est continue, cette solution est de classe C^2 sur $[0, 1]$.

(1bis) admet une unique solution

2. Notons $\boxed{w_2 = v_0}$, c'est à dire que w_2 est l'unique fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$ telle que

$$\forall x \in [0, 1], -w_2''(x) + c(x)w_2(x) = f(x) \quad \text{et} \quad w_2(0) = 0, \quad w_2'(0) = 0$$

Posons $w = \lambda w_1 + w_2$. On a immédiatement $w(0) = \lambda$ et $w'(0) = \lambda$. De plus, $w \in C^2([0, 1])$ et

$$\forall x \in [0, 1], \quad w''(x) = \lambda w_1''(x) + w_2''(x) = \lambda c(x)w_1(x) + c(x)w_2(x) - f(x) = c(x)w(x) - f(x)$$

On en déduit que $\boxed{v_\lambda = \lambda w_1 + w_2}$.

3. Posons $h = w_1^2$. On a $h' = 2w_1w_1'$ et $h'' = 2(w_1')^2 + 2w_1w_1'' = 2(w_1')^2 + 2cw_1^2 \geq 0$. h' est donc croissante. Comme elle est nulle en 0, elle est positive. h est donc croissante. Si, par l'absurde, h était nulle en 1, on aurait h nulle sur $[0, 1]$. w_1 serait aussi nulle sur $[0, 1]$ et ceci contredit $w_1'(0) = 1$. Ainsi,

$$w_1(1) \neq 0$$

4. On peut alors poser $\lambda = -\frac{w_2(1)}{w_1(1)}$ et on a $v_\lambda(1) = 0$ par choix de λ . v_λ est ainsi solution de (1). Soit u une solution de (1). u est l'unique solution du problème de Cauchy (1bis) avec $\lambda = u'(0)$. On a donc $u = v_{u'(0)} = u'(0)w_1 + w_2$. Ainsi, $0 = u(1) = u'(0)w_1(1) + w_2(1)$ et $u'(0) = -\frac{w_2(1)}{w_1(1)}$. u est donc égale à la solution v_λ exhibée.

(1) possède une unique solution

5. Supposons, par l'absurde, que u prenne des valeurs < 0 . u étant continue sur le segment $[0, 1]$ admet un minimum m . Avec notre hypothèse, $m < 0$. L'ensemble $\{t \in [0, 1] / u(t) = m\}$ admet une borne inférieure que l'on note α . Par continuité de u , on a $u(\alpha) = m$ et $\alpha \in]0, 1[$ (puisque $u(0) = u(1) = 0$). Ainsi, $u'(\alpha) = 0$ (minimum atteint sur l'ouvert $]0, 1[$). Sur un voisinage $]\alpha - r, \alpha + r[$ de α , la fonction u est négative (par continuité) et donc $u'' = cu - f$ est aussi négative sur ce voisinage. En particulier, u' est décroissante sur ce voisinage. Comme $u'(\alpha) = 0$, u' est positive sur $]\alpha - r, \alpha]$ et u est croissante sur cet intervalle. Comme u est minimale en α , u est en fait constante sur $]\alpha - r, \alpha]$. Ceci contredit la définition de α .

Si $f \geq 0$, l'unique solution de (1) est positive

2 Une matrice de discrétisation

6. A_n étant symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral (et admet même une base orthonormée de vecteurs propres). En particulier

les valeurs propres de A_n sont réelles

En utilisant les notations de l'énoncé, on a (avec la convention $v_0 = v_{n+1} = 0$)

$$AV = W \text{ avec } w_i = -v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}$$

Si $AV = \lambda V$, on a ainsi

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, v_{i+1} - (2 - \lambda)v_i + v_{i-1} = 0}$$

7. Soit λ une valeur propre de A_n et V un vecteur propre associé. Notons v_i une coordonnée maximale en module. On a alors $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $|v_k| \leq |v_i|$ et ceci est encore vrai pour $k = 0$ ou $k = n + 1$ avec la convention choisie. Avec la question précédente et l'inégalité triangulaire,

$$|2 - \lambda| \cdot |v_i| \leq |v_{i+1}| + |v_{i-1}| \leq 2|v_i|$$

Comme $|v_i| > 0$ (puisque V n'est pas le vecteur nul), on en déduit que $|2 - \lambda| \leq 2$ et donc $\lambda \in [0, 4]$.

Si $|2 - \lambda| = 2$ alors, l'inégalité précédente est une égalité et $|v_{i-1}| = |v_i| = |v_{i+1}|$. Une récurrence simple montre alors que $|v_i| = |v_{i-1}| = \dots = |v_1| = |v_0| = 0$. V est alors le vecteur nul (puisque $|v_i|$ qui est maximale est nulle) ce qui est faux (puisque c'est un vecteur propre). Ainsi

$$\boxed{\text{Sp}(A_n) \subset]0, 4[}$$

8. (a) Le discriminant de P vaut $\lambda(\lambda - 4) < 0$. P (qui est un polynôme réel) admet donc deux racines complexes (non réelles) conjuguées.

$$\boxed{r_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ et } r_2 = \bar{r}_1}$$

- (b) On considère toujours un vecteur propre V associé à λ . Notons (u_i) l'unique suite réelle telle que

$$u_0 = v_0 = 0, u_1 = v_1 \text{ et } \forall i \geq 1, u_{i+1} = (2 - \lambda)u_i - u_{i-1}$$

La suite (u_i) est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, d'équation caractéristique $P(r) = 0$. Le cours nous apprend que

$$\exists a, b \in \mathbb{R} / \forall k, u_k = \rho^k (a \cos(k\theta) + b \sin(k\theta))$$

Comme $u_0 = 0$, on a $a = 0$. Par ailleurs, une récurrence immédiate donne

$$\forall k \in \{0, \dots, n + 1\}, v_k = u_k$$

La condition $v_{n+1} = 0$ indique alors que $b \sin((n + 1)\theta) = 0$. Comme V n'est pas le vecteur nul, u n'est pas la suite nulle et donc $b \neq 0$. Ainsi, $\sin((n + 1)\theta) = 0$.

Enfin, le produit des racines de P vaut 1 (relations coefficients-racines) et on a donc $\rho = 1$.

$$\boxed{\sin((n + 1)\theta) = 0 \text{ et } \rho = 1}$$

9. Posons $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ pour $k = 1, \dots, n$ et P_k le polynôme dont les racines sont $e^{i\theta_k}$ et $e^{-i\theta_k}$. On a donc

$$P_k(r) = r^2 - 2 \cos(\theta_k)r + 1$$

On se retrouve dans la situation de la question précédente avec $\lambda_k = 2(1 - \cos(\theta_k))$. La suite de terme général $u_p = \sin(p\theta_k)$ vérifie la relation de récurrence linéaire et on a $u_{n+1} = 0$. Le calcul qui précède montre ainsi que

$$V_k = {}^t(\sin(\theta_k), \sin(2\theta_k), \dots, \sin(n\theta_k))$$

est propre pour A_n associé à la valeur propre λ_k .

Comme $\cos$ est injective sur $[0, \pi]$, on a trouvé n valeurs propres distinctes. Comme A_n est de taille n et comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a toutes les valeurs propres et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

$$\boxed{\text{Sp}(A_n) = \{2(1 - \cos(\theta_k)) / k \in \{1, \dots, n\}\}}$$

Les vecteurs $V_k = {}^t(\sin(\theta_k), \sin(2\theta_k), \dots, \sin(n\theta_k))$ forment une base de vecteurs propres

10. (a) Soit X un élément du noyau de B . Supposons, par l'absurde, que X est non nul. Il existe alors une coordonnée x_i maximale en module. En exprimant la nullité de la i -ème coordonnée de BX , on obtient

$$\sum_{j=1}^n b_{i,j} x_j = 0$$

On en déduit (par inégalité triangulaire et en tenant compte du signe des coefficients de B) que

$$b_{i,i}|x_i| \leq \sum_{j \neq i} (-b_{i,j})|x_j| \leq \sum_{j \neq i} (-b_{i,j})|x_i|$$

Comme $|x_i| > 0$, ceci contredit la troisième propriété des M -matrices.

Toute M -matrice est inversible

- (b) Supposons F à coordonnées positives et posons $Y = B^{-1}F$. On a alors $BY = F$. Notons y_i la coordonnée minimale de Y . En exploitant la i -ème coordonnée de BY , et compte-tenu du signe des $b_{i,j}$ ($y_j \geq y_i$ et en multipliant par $b_{i,j} \leq 0$ pour $j \neq i$, $b_{i,j}y_j \leq b_{i,j}y_i$) on obtient

$$0 \leq f_i = \sum_{j \neq i} b_{i,j}y_j + b_{i,i}y_i \leq \sum_{j \neq i} b_{i,j}y_i + b_{i,i}y_i = y_i \sum_{j=1}^n b_{i,j}$$

La somme du membre de droite étant > 0 , on en déduit que $y_i \geq 0$.

Si F est à coordonnées positives, $B^{-1}F$ aussi

- (c) Les colonnes de B^{-1} sont les images par B^{-1} des vecteurs de la base canonique. Comme ces derniers sont à coefficients positifs, on en déduit avec la question précédente que

Toute M -matrice à une inverse à coefficients positifs

11. Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. $A_n + \varepsilon I_n$ est une M -matrice (vérification simple, en particulier la somme par ligne vaut $1 + \varepsilon$ ou ε et est > 0). $(A_n + \varepsilon I_n)^{-1}$ est ainsi à coefficients positifs.

On rappelle que

$$\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \quad M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t \text{Com}(M)$$

On en déduit (le passage au déterminant étant continu, ce qui implique aussi que le passage à la comatrice l'est) que A_n^{-1} est limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de $(A_n + \varepsilon I_n)^{-1}$. Une limite de termes positifs étant positive,

A_n^{-1} est à coefficients positifs

3 Une suite d'approximations de la solution de (1)

12. Par égalité de Taylor avec reste intégrale,

$$v(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^3 \frac{h^k}{k!} v^{(k)}(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - t)^3}{6} v^{(4)}(t) dt$$

$$v(x_{i-1}) = \sum_{k=0}^3 \frac{(-h)^k}{k!} v^{(k)}(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i-1}} \frac{(x_{i-1} - t)^3}{6} v^{(4)}(t) dt$$

On fait la différence de ces égalités. Les termes pour $k = 1$ et $k = 3$ s'éliminent et il reste

$$v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) = 2v(x_i) + h^2 v''(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - t)^3}{6} v^{(4)}(t) dt + \int_{x_i}^{x_{i-1}} \frac{(x_{i-1} - t)^3}{6} v^{(4)}(t) dt$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i) - h^2 v''(x_i)| &\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - t)^3}{6} |v^{(4)}(t)| dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(t - x_{i-1})^3}{6} |v^{(4)}(t)| dt \\ &\leq \frac{\|v^{(4)}\|_\infty}{6} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t)^3 dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1})^3 dt \right) \\ &\leq \frac{\|v^{(4)}\|_\infty}{6} (h^4 + h^4) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, |v''(x_i) - \frac{1}{h^2}(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i))| \leq Ch^2 \text{ avec } C = \frac{\|v^{(4)}\|_\infty}{3}}$$

Bien sûr, $\|v^{(4)}\|_\infty$ existe car on a supposé que $v \in \mathcal{C}^4([0, 1])$.

13. Les relations (2) équivalent à l'équation matricielle

$$\left(\frac{1}{h^2} A_n + \text{diag}(c(x_1), \dots, c(x_n)) \right) U = F \text{ avec } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de montrer que $B_n(h) = \frac{1}{h^2} A_n + \text{diag}(c(x_1), \dots, c(x_n))$ est inversible.

Reprenons le calcul de la question 7 et considérons λ une valeur propre de $h^2 B_n$ et V un vecteur propre associé. Notons v_i une coordonnée maximale en module (et posons $v_0 = v_{n+1} = 0$). On a alors

$$|2 + h^2 c_i(x) - \lambda| \cdot |v_i| \leq |v_{i+1}| + |v_{i-1}| \leq 2|v_i|$$

On en déduit que $\lambda \geq h^2 c_i(x)$.

Si $c_i(x) > 0$ alors $\lambda > 0$ et $h^2 B_n$ est inversible puisque 0 n'est pas valeur propre.

Sinon, supposons par l'absurde que $\lambda = 0$. On a alors $\lambda = h^2 c_i(x) = 0$ (puisque $c_i(x) \geq 0$). Le même raisonnement qu'en 7 montre que $V = 0$ et donne une contradiction.

La matrice $B_n(h)$ est ainsi inversible (comme $h^2 B_n(h)$) et

$$\boxed{(2) \text{ admet une unique solution}}$$

14. L'équation (1) s'écrit $u'' = -1$ et il existe donc des constantes c, d telles que $\forall x, u(x) = -\frac{x^2}{2} + cx + d$. Les conditions $u(0) = u(1) = 0$ donnent $d = 0$ et $c = 1/2$. Ainsi,

$$\forall x \in [0, 1], u(x) = \frac{1}{2}x(1 - x)$$

On vérifie que, pour $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i) &= \frac{1}{2}x_{i+1}(1 - x_{i+1}) + \frac{1}{2}x_{i-1}(1 - x_{i-1}) - x_i(1 - x_i) \\ &= h \left(\frac{i+1}{2}(1 - (i+1)h) + \frac{i-1}{2}(1 - (i-1)h) - i(1 - ih) \right) \\ &= -h^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $U = {}^t(u(x_1), \dots, u(x_n))$ vérifie $A_n U = h^2 F$ où F a toutes ses coordonnées égales à $1 = f(x_i)$. U vérifie donc (2) en ajoutant les termes d'indices 0 et $n+1$.

$$\boxed{\forall i \in \{0, \dots, n+1\}, u_i = u(x_i) = \frac{1}{2}x_i(1-x_i)}$$

15. Avec les notations de la question 13, $B_n(h) + \varepsilon I_n$ est, pour $\varepsilon > 0$, une M matrice et son inverse est donc à coefficients positifs. En procédant comme en question 11, $B_n(h)^{-1}$ est à coefficients positifs. Si F est à coefficients positifs, ce qui est le cas si f est positive, $U = B_n(h)^{-1}F$ est à coefficients positifs. Comme on a aussi $u_0, u_{n+1} \geq 0$,

$$\boxed{\text{si } f \text{ est positive, alors } \forall i \in \{0, \dots, n+1\}, u_i \geq 0}$$

4 Un premier résultat de convergence

16. On a plusieurs propriétés à prouver. Ci-dessous, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices unicolonne de taille n .
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $X \mapsto AX$ est continue (linéaire en dimension finie). De plus $\{x / \|x\|_\infty \leq 1\}$ est un compact (fermé borné en dimension finie). $N(A)$ est ainsi bien définie (et c'est même un maximum).
 - $\forall A, N(A) \geq 0$ (borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}^+$).
 - Si $N(A) = 0$ alors $\forall x, Ax = 0$ et A est donc nulle (l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A l'est).
 - $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1, \|(A+B)x\|_\infty \leq \|Ax\|_\infty + \|Bx\|_\infty \leq N(A) + N(B)$ Par passage à la borne supérieure, $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.
 - $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1,$

$$\|(\lambda A)x\|_\infty = |\lambda| \|Ax\|_\infty \leq |\lambda| N(A)$$

Par passage au sup, $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$.

Si $\lambda = 0$, l'inégalité est une égalité.

Sinon, on utilise notre calcul pour obtenir $N(A) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$ et récupérer encore l'égalité.

On a donc montré que

$$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

On fixe une matrice A . Pour $x \in \mathbb{R}^n$ de norme ≤ 1 , on a

$$\forall i, |(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

En passant au maximum sur tous les i , on obtient

$$\|Ax\|_\infty \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

et en passant à la borne supérieure sur tous les x ,

$$N(A) \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

Ce maximum est atteint pour une certaine valeur i_0 de i . Si on pose $x_k = 1$ quand $a_{i_0,k} \geq 0$ et $x_k = -1$ sinon, on obtient un vecteur x de norme infinie ≤ 1 et pour lequel $|(Ax)_{i_0}|$ est égal au maximum. Le majorant trouvé pour les $\|Ax\|_\infty$ est donc atteint et notre dernière inégalité est une égalité.

$$N(A) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

17. On continue à identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices unicolones de taille n .

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$. Notons $\mathbf{1}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées valent 1. $\mathbf{1} - x$ et $\mathbf{1} + x$ ont des coordonnées toutes positives. La question 15 (utilisée dans le cas $c = 0$) indique alors que

$$U' = ((n+1)^2 A_n)^{-1}(\mathbf{1} - x) \quad \text{et} \quad U'' = ((n+1)^2 A_n)^{-1}(\mathbf{1} + x)$$

sont à coordonnées positives. En notant $y = ((n+1)^2 A_n)^{-1}x$ et $z = ((n+1)^2 A_n)^{-1}\mathbf{1}$, on a ainsi $-z_i \leq y_i \leq z_i$ et donc $\forall i, |y_i| \leq z_i$ ce qui entraîne

$$\|((n+1)^2 A_n)^{-1}x\|_\infty \leq \|((n+1)^2 A_n)^{-1}\mathbf{1}\|_\infty$$

Comme ceci est vrai pour tous les x de norme ≤ 1 , on en conclut que

$$N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \leq \|((n+1)^2 A_n)^{-1}\mathbf{1}\|_\infty$$

La question 14 permet d'évaluer le membre de droite. Plus précisément, $z_i = \frac{1}{2}ih(1 - ih)$. Comme $t \mapsto \frac{1}{2}t(1 - t)$ est plus petite que $1/8$ sur $[0, 1]$ (simple étude de fonction), $\|z\|_\infty \leq \frac{1}{8}$. On a donc montré que

$$N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \leq \frac{1}{8}$$

- (b) On suppose que D_n est diagonale à coefficients positifs. On sait que $B_n = (n+1)^2 A_n + D_n$ est une M -matrice et donc inversible d'inverse à coefficients positifs (avec la question 10). Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|_\infty \leq 1$. Notons $|x| \in \mathbb{R}^n$ l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont les $|x_i|$ et posons $z = B_n^{-1}|x|$. C'est un vecteur à coordonnées positives (comme B_n^{-1} et $|x|$). On a $|x| = B_n z = (n+1)^2 A_n z + D_n z$. Comme $D_n z$ est à coefficients positifs, $\forall i, |x|_i \geq y_i$ où $y = (n+1)^2 A_n z$. $|x| - y$ est à coefficients positifs et $((n+1)^2 A_n)^{-1}$ aussi. On en déduit que $((n+1)^2 A_n)^{-1}|x| - z$ est à coefficients positifs. Ainsi (comme z est aussi à coefficients positifs)

$$\|z\|_\infty \leq \|((n+1)^2 A_n)^{-1}|x|\|_\infty$$

Comme $|x|$ est de norme ≤ 1 on en déduit que

$$\|z\|_\infty \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1})$$

Par inégalité triangulaire, et comme B_n^{-1} est à coefficients positifs, $|(B_n^{-1}x)|_i \leq B_n^{-1}|x|_i = z_i$. Finalement

$$\|B_n^{-1}x\|_\infty \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1})$$

Ceci étant vrai pour tous les x de norme plus petite que 1,

$$N(((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}) \leq N(((n+1)^2 A_n)^{-1}) \leq \frac{1}{8}$$

18. On utilise les notations suggérées par l'énoncé. On a alors

$$A_n X = A_n \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix} - A_n \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = V \quad \text{avec} \quad v_i = -(u(x_{i-1}) - u_{i-1}) + 2(u(x_i) - u_i) - (u(x_{i+1}) - u_{i+1})$$

En utilisant la relation vérifiée par (u_i) , on a

$$v_i = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - h^2(f(x_i) - c(x_i)u_i)$$

Comme $f(x_i) - c(x_i)u(x_i) = -u''(x_i)$ on trouve alors

$$v_i = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) + h^2 u''(x_i) - h^2 c(x_i)(u(x_i) - u_i)$$

ce que l'on peut écrire

$$v_i + h^2 c(x_i)(u(x_i) - u_i) = 2u(x_i) - u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) + h^2 u''(x_i)$$

Si on divise par h^2 , la question 12 (utilisable avec u car $u'' = cu - f \in \mathcal{C}^2$ et donc $u \in \mathcal{C}^4$), on a alors

$$\frac{1}{h^2} v_i + c(x_i)(u(x_i) - u_i) = w_i \quad \text{avec} \quad |w_i| \leq Ch^2$$

Avec la définition de V et en notant $D_n = \text{diag}(c(x_1), \dots, c(x_n))$,

$$((n+1)^2 A_n + D_n)X = W$$

ou encore (si $W \neq 0$)

$$X = \|W\|_\infty ((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1} \frac{W}{\|W\|_\infty}$$

Par définition de N ,

$$\|X\|_\infty \leq \|W\|_\infty N (((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}) \leq \frac{C}{8(n+1)^2}$$

On a donc montré que

$$\boxed{\exists \tilde{C} / \forall n \in \mathbb{N}^*, \max_{0 \leq i \leq n+1} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{\tilde{C}}{n^2}}$$

5 Un second résultat de convergence

19. (a) Une variable de Bernoulli de paramètre x à une espérance égale à x et une variance égale à $x(1-x)$. Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = x}$$

Les X_i étant indépendantes, la variance de la somme est égale à la somme des variances et

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{x(1-x)}{n}}$$

Par formule de transfert (et comme les valeurs prises par les S_n sont les k/n avec $k = 0, \dots, n$)

$$\mathbb{E}(f(S_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}(nS_n = k)$$

Or, nS_n suit une loi binomiale de paramètres n et x . Ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(f(S_n)) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n f(x)}$$

- (b) Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors on peut définir la variance et on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

La variance étant positive, $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$. On utilise ceci avec $X = |S_n - x|$:

$$\mathbb{E}(|S_n - x|^2) \leq \mathbb{E}((S_n - x)^2)$$

Comme $x = \mathbb{E}(S_n)$, le membre de droite vaut $\mathbb{V}(S_n)$. On utilise la question précédente pour obtenir le membre de gauche :

$$\left(\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right)^2 \leq \mathbb{V}(S_n)$$

Comme la parenthèse est positive, le passage à la racine carrée (opération croissante) donne la première inégalité. Pour la seconde, on utilise $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (étude de fonction déjà évoquée en question 17(a)) ce qui donne $\mathbb{V}(S_n) \leq \frac{1}{4n}$ et on passe encore à la racine carrée.

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

20. Distinguons deux cas.

- Si $\lambda \in]0, 1]$ alors (comme $\alpha > 0$), $\lambda^\alpha \leq 1 \leq 1 + \lambda$.
- Sinon $\lambda > 1$ et donc $\lambda^\alpha \leq \lambda$ (car $\alpha \leq 1$) et $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$.

On a ainsi

$$\boxed{\forall \lambda > 0, \lambda^\alpha \leq 1 + \lambda}$$

On veut utiliser ceci avec $\lambda = \sqrt{n}|x - k/n|$. Ceci est possible si $x \neq k/n$ et donne alors

$$(\sqrt{n}|x - k/n|)^\alpha \leq 1 + \sqrt{n}|x - k/n|$$

En divisant par $n^{\alpha/2}$ (qui est > 0), on obtient l'inégalité demandé. Cette inégalité reste trivialement vraie quand $x = k/n$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2} (1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|)}$$

21. En utilisant la formule du binôme avec $(x + (1-x))^n$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

On en déduit que

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Par inégalité triangulaire puis avec l'hypothèse faite sur f , puis avec la question précédente

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq K \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{K}{n^{\alpha/2}} \sum_{k=0}^n \left(1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{K}{n^{\alpha/2}} \left(1 + \sqrt{n} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \end{aligned}$$

La question 19(b) permet de majorer la somme et d'obtenir

$$|f(x) - B_n f(x)| \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

Il reste à passer à la borne supérieure sur $x \in]0, 1[$ (qui est la même que celle sur $[0, 1]$ par continuité des fonctions) pour conclure que

$$\|f - B_n f\|_{\infty} \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

22. On va utiliser ici la formule $k \binom{p+1}{k} = (p+1) \binom{p}{k-1}$ (qui se prouve facilement avec les expressions avec des factorielles) et aussi $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1-k}$. On a

$$\begin{aligned} (\hat{B}_{n+1}u)'(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} u_k k \binom{n+1}{k} x^{k-1} (1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^n u_k (n+1-k) \binom{n+1}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (n+1) \left(\sum_{k=1}^{n+1} u_k \binom{n}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=1}^{n+1} u_k \binom{n}{n-k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

On se trouve dans la même situation pour redériver. En posant $v_k = u_{k+1} - u_k$, on a $v_{k+1} - v_k = u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k$ et

$$(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = n(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

On utilise alors $u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = -h^2 f(x_{k+1}) = -\frac{1}{(n+1)^2} f(x_{k+1})$ pour obtenir

$$(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = -\frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

23. (a) Avec la question précédente, on a d'abord

$$(\hat{B}_{n+1}u)''(x) = -\frac{n}{n+1} \left(B_{n-1}f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n-1}\right) \right) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \right)$$

On ajoute $-u''(x) = f(x)$ pour en déduire

$$\begin{aligned} \chi_{n+1}''(x) &= (f(x) - B_{n-1}f(x)) + \frac{1}{n+1} B_{n-1}f(x) \\ &\quad - \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n-1}\right) \right) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \end{aligned}$$

Remarquons que

$$|B_{n-1}f(x)| \leq \|f\|_{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \leq \|f\|_{\infty}$$

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n-1}\right) \right| &\leq K \left| \frac{k+1}{n+1} - \frac{k}{n-1} \right|^\alpha \\
&\leq K \left| \frac{n-2k+1}{(n-1)(n+1)} \right|^\alpha \\
&\leq \frac{K}{(n+1)^\alpha}
\end{aligned}$$

car $-(n-1) \leq n-2k-1 \leq n-1$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|\chi''_{n+1}(x)| \leq \|f - B_{n-1}f\|_\infty + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + \frac{K}{(n+1)^\alpha}$$

En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\|\chi''_{n+1}\|_\infty \leq \|f - B_{n-1}f\|_\infty + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

- (b) On fixe $x \in]0, 1[$ et on considère la fonction h de l'énoncé. h est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et

$$h'(t) = \chi'_{n+1}(t) - \frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}(1-2t)$$

$$h''(t) = \chi''_{n+1}(t) + 2 \frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}$$

Remarquons que comme $\chi_{n+1}(0) = \hat{B}_{n+1}u(0) = u_0 = 0$ et de même $\chi_{n+1}(1) = u_{n+1} = 0$ et que de plus $h(x) = 0$, par théorème de Rolle h' s'annule sur $]0, x[$ et sur $]x, 1[$. A nouveau par théorème de Rolle, h'' s'annule au moins une fois en un point ξ . ceci donne

$$\chi_{n+1}(x) = -\frac{1}{2}x(1-x)\chi''_{n+1}(\xi)$$

Pour $x \in \{0, 1\}$, toute valeur de ξ convient car $\chi_{n+1}(0) = \chi_{n+1}(1) = 0$.

24. On en déduit en combinant les deux questions de 23 que pour tout $x \in [0, 1]$

$$|\chi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{8}\|\chi''_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{8} \left(\|f - B_{n-1}f\|_\infty + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$$

En passant à la norme infinie et avec la question 21 on a donc

$$\|\chi_{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{8} \left(\frac{3K}{2(n-1)^{\alpha/2}} + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$$

$n^{\alpha/2}\|\chi_{n+1}\|_\infty$ est alors majoré par une suite convergente et est une suite bornée. Ainsi

$$\exists M > 0 / \forall n \in \mathbb{N}^*, \|u - \hat{B}_{n+1}u\|_\infty \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}$$