

PARTIE I

I) 1) 1) La sphère unité Ω_n est bornée et fermée comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $x \mapsto \|x\|$, donc Ω_n est un compact; les applications $x \mapsto Ax$ et $(x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$ sont respectivement linéaires et bilinéaires donc continues ce qui assure que q_A est continue donc la fonction numérique q_A est bornée sur Ω_n et atteint ses bornes.

I) 1) 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R} \cap sp(A)$ et x un vecteur propre associé qu'on peut, quitte à diviser par sa norme, supposer dans Ω_n , alors $q_A(x) = \langle Ax | x \rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda \Rightarrow m_A \leq \lambda \leq M_A$. Ainsi $\mathbb{R} \cap sp(A) \subset [m_A, M_A]$.

I) 1) 3) A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux donc $sp(A) = \{2\}$; si $x = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ on a $q_A(x) = 2 \cos^2(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta) + 2 \sin^2(\theta) = 2 - \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ donc $m_A = q_A((\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}))) = \frac{3}{2}$ et $M_A = q_A((\cos(-\frac{\pi}{4}), \sin(-\frac{\pi}{4}))) = \frac{5}{2}$.

I) 2) 1) Comme $q_A(0) = 0$ supposons $y \neq 0$ alors $q_A(y) = q_A(\|y\| y'), y' = \frac{y}{\|y\|}$ donc puisque $y' \in \Omega_n$, $q_A(y) = \|y\|^2 q_A(y') = 0$.

I) 2) 2) D'après la bilinéarité du produit scalaire et la question I) 2) 1), $q_A(y+z) = \langle Ay | z \rangle + \langle Az | y \rangle$.

I) 2) 3) On a $\langle Az | y \rangle = \langle z | ({}^t A) y \rangle = \langle ({}^t A) y | z \rangle$ donc grâce à I) 2) 2), pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle ({}^t A + A) y | z \rangle$ d'où pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $({}^t A + A) y = 0 \Rightarrow {}^t A + A = 0$ et donc A est antisymétrique.

On peut aussi suivant les indications de l'énoncé remarquer que $(*) \langle Ay | z \rangle = \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n a_{l,p} y_p z_l$ et donc

$$\langle Az | y \rangle = \langle ({}^t A) y | z \rangle = \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n a_{p,l} y_p z_l \Rightarrow \langle Ay | z \rangle + \langle Az | y \rangle = \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n (a_{l,p} + a_{p,l}) y_p z_l \text{ d'où pour tout}$$

$(j, k) \in \{1, \dots, n\}^2$, en remplaçant y par le j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et z par le k -ième vecteur de la dite base on a $a_{j,k} + a_{k,j} = 0$ ce qui assure que A est antisymétrique.

I) 3) Il est clair que si $A = 0$ alors $\forall x \in \Omega_n, q_A(x) = 0$; réciproquement si $\forall x \in \Omega_n, q_A(x) = 0$, la question précédente assure que A est antisymétrique et étant symétrique par hypothèse, alors $A = 0$.

I) 4) -) si $N(A) = 0$ alors $\forall x \in \Omega_n, q_A(x) = 0$ donc d'après I) 3), $A = 0$;

-) il est clair que si $\lambda = 0$ alors $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$; soit donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\forall x \in \Omega_n, |q_{\lambda A}(x)| = |\lambda| |q_A(x)| \leq |\lambda| N(A)$ donc $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$ et d'autre part en utilisant ce qui précède on a $N(A) = N(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A) \Rightarrow |\lambda| N(A) \leq N(\lambda A)$ d'où l'égalité $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.

-) on a pour tout $x \in \Omega_n, |q_{A+B}(x)| = |\langle Ax | x \rangle + \langle Bx | x \rangle| \leq |\langle Ax | x \rangle| + |\langle Bx | x \rangle| \leq N(A) + N(B) \Rightarrow N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

On peut donc conclure que N est une norme.

I) 5) 1) En reprenant le calcul fait à la question I) 1) 2) on a $q_A(e_k) = \lambda_k$.

I) 5) 2) Puisque la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée alors $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2$ et puisque $x \in \Omega_n$ alors

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x'_k)^2 = 1. \text{ De même } q_A(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x'_k)^2.$$

I) 5) 3) D'après les questions précédentes, on a pour tout $x \in \Omega_n, \lambda_1 = q_A(e_1) = \lambda_1 \times 1 = \sum_{k=1}^n \lambda_1 (x'_k)^2 \leq$

$\sum_{k=1}^n \lambda_k (x'_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_n (x'_k)^2 = \lambda_n = q_A(e_n)$ donc la fonction q_A possède un minimum $m_A = \lambda_1$ et un maximum $M_A = \lambda_n$ sur la sphère unité Ω_n .

I) 5) 4) soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|\lambda_i| = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$; alors $\max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| = |q_A(e_i)| \leq N(A)$ et enfin pour tout $x \in \Omega_n$, $|q_A(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| (x'_k)^2 \leq \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$ donc $N(A) \leq \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$; ainsi on a bien $N(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda|$.

Puisque $\det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ alors $|\det(A)| \leq \left(\max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| \right)^n = (N(A))^n$.

I) 5) 5) On a $\det(A) = \frac{1}{12}$ et le polynôme caractéristique de A est $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{12}$ qui a pour racines $\frac{4+\sqrt{13}}{6}$ et $\frac{4-\sqrt{13}}{6}$ donc $sp(A) = \left\{ \frac{4+\sqrt{13}}{6}, \frac{4-\sqrt{13}}{6} \right\}$ et donc $N(A) = \max_{\lambda \in sp(A)} |\lambda| = \frac{4+\sqrt{13}}{6}$.

PARTIE II

II) 1) 1) D'après l'égalité (*) de I) 2) 3) on a $q_n(x) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{j+k-1} x_k \right) x_j = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{x_k x_j}{j+k-1}$.

II) 1) 2) On a $\left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j t^{k+j-2}$.

II) 1) 3) On a $\int_0^1 t^{k+j-2} dt = \frac{1}{k+j-1}$ donc $\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j t^{k+j-2} \right) dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j \int_0^1 t^{k+j-2} dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j \frac{1}{j+k-1} = q_n(x)$.

II) 1) 4) La fonction $w : t \mapsto \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right)^2$ est positive donc puisque $0 < 1$ alors $q_n(x) \geq 0$, et puisque w est aussi continue $q_n(x) = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} = 0$ donc le polynôme $\sum_{k=1}^n x_k X^{k-1}$ a une infinité de racines donc est identiquement nul c'est-à-dire $x_1 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0$. Il est clair que $x = 0 \Rightarrow q_n(x) = 0$. On déduit alors aisément que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

II) 2) 1) Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $\int_{-1}^1 t^k dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{2}{k+1} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$ et $-i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta = -\frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1}$ donc $-i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{2}{k+1} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$ d'où $\int_{-1}^1 t^k dt = -i \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta$. Ainsi $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^m a_k \int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{k=0}^m a_k (-i) \int_0^\pi e^{ik\theta} e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^m a_k e^{ik\theta} \right) e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$.

II) 2) 2) D'après II) 1) 4) on a $0 \leq q_n(x)$ avec inégalité stricte si $x \neq 0$; on a $\int_0^1 (Q(t))^2 dt \leq \int_{-1}^1 (Q(t))^2 dt$ avec inégalité stricte si $Q(t) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, mais grâce à II) 2) 1), $0 \leq \int_{-1}^1 (Q(t))^2 dt = \int_0^\pi -i (Q(e^{i\theta}))^2 e^{i\theta} d\theta = \left| \int_0^\pi -i (Q(e^{i\theta}))^2 e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \left| -i (Q(e^{i\theta}))^2 e^{i\theta} \right| d\theta = \int_0^\pi |Q(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta$.

II) 2) 3) En utilisant le changement de variable $\eta = 2\pi - \theta$ on a $\int_\pi^{2\pi} |Q(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^\pi |Q(e^{-i\eta})|^2 d\eta$ et puisque $Q(e^{-i\eta}) = \overline{Q(e^{i\eta})}$ car $Q \in \mathbb{R}[X]$ on a alors $\int_\pi^{2\pi} |Q(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^\pi |Q(e^{i\theta})|^2 d\theta \Rightarrow \int_0^\pi |Q(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |Q(e^{i\theta})|^2 d\theta$.

Si $f : \theta \mapsto Q(e^{i\theta})$ alors par application du théorème de Bessel-Parseval on a $\int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^n x_k e^{i(k-1)\theta} \right|^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \pi \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|^2 = \pi \sum_{k=1}^n x_k^2 = \pi \|x\|^2$.

D'après la question précédente on a donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq q_n(x) \leq \pi \|x\|^2$ avec inégalités strictes si $x \neq 0$.

II) 3) 1) De I) 5) 5) on a $\mu_2 = \frac{4-\sqrt{13}}{6}$ et $\rho_2 = \frac{4+\sqrt{13}}{6}$. Puisque les valeurs propres de H_n sont strictement positives alors $0 < \mu_n$; comme la matrice H_n est diagonalisable et non scalaire, les valeurs propres de H_n ne sont pas toutes égales donc $\mu_n < \rho_n$; enfin si e_n est vecteur propre unitaire de H_n associé à ρ_n on a en vertu des questions I) 5) 1) et II) 2) 3) $0 < q_n(e_n) = \rho_n < \pi$.

II) 3) 2) On sait que $q_n(\Omega_n) \subset [\mu_n, \rho_n]$; enfin si $z \in [\mu_n, \rho_n]$ il existe $t \in [0, 1]$ tel que $z = (1-t)\mu_n + t\rho_n$, d'où si $x = \sqrt{1-te_1} + \sqrt{te_n}$ on a $q_n(x) = \langle \sqrt{1-t}\mu_n e_1 + \sqrt{t}\rho_n e_n \mid \sqrt{1-te_1} + \sqrt{te_n} \rangle = (1-t)\mu_n + t\rho_n = z \Rightarrow [\mu_n, \rho_n] \subset q_n(\Omega_n)$. On peut donc conclure que $q_n(\Omega_n) = [\mu_n, \rho_n]$.

II) 3) 3) D'après II) 1) 1) $q_n(\varepsilon_n) = \langle H_n \varepsilon_n \mid \varepsilon_n \rangle = \frac{1^2}{n+n-1} = \frac{1}{2n-1}$ donc puisque $\varepsilon_n \in \Omega_n$ alors $0 < \mu_n \leq \frac{1}{2n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = 0$.

PARTIE III

III) 1) 1) Posons pour $(u, v) \in \Gamma_n$, $\Psi(u, v) = (u^2, v^2)$, alors $\Psi(\Gamma_n) = D_n$ et la valeur absolue du Jacobien de Ψ en (u, v) est $4uv$ donc d'après le théorème du changement de variable pour les intégrales multiples,

$$I_n = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{4uv}{\sqrt{u^2 v^2 (u^2 + v^2 - 1)}} du \right) dv = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2 + v^2 - 1} \right) dv.$$

Or pour tout $v \in [1, \sqrt{n}]$ comme $1 \leq \sqrt{n}$ on a $\frac{1}{u^2 + v^2 - 1} \geq \frac{1}{u^2 + v^2} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2 + v^2 - 1} \geq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2 + v^2}$ donc puisque $1 \leq \sqrt{n}$

on a de plus $I_n \geq \int_1^{\sqrt{n}} \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2 + v^2} \right) dv = 4J_n$.

III) 1) 2) En utilisant le changement de variable $t = \frac{u}{v}$ on a

$$\int_1^{\sqrt{n}} \frac{4du}{u^2 + v^2} = \frac{4}{v} \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{\sqrt{n}}{v}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{v} \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{v}\right) - \arctan\left(\frac{1}{v}\right) \right) = \frac{1}{v} \left(\arctan(v) - \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \right),$$

$$\text{donc } J_n = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\frac{\arctan(v)}{v} \right) dv - \int_1^{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{v} \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{n}}\right) \right) dv = K_n - L_n.$$

III) 2) 1) On a $0 \leq t \Rightarrow \arctan(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_0^t dx = t \Rightarrow \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{x}{\sqrt{n}}$ donc puisque de plus

$x \mapsto \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ est positive continue non nulle sur $[1, \sqrt{n}]$ on a $0 < L_n \leq \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} dx = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \leq 1$.

III) 2) 2) On a en utilisant la majoration de $\arctan(t)$ vue à la question précédente $0 < \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x^2}$ donc la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ assure la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$. En utilisant la relation rappelée au début on a

$$K_n = \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{n}} \frac{dx}{x} - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\pi}{4} \ln(n) - \int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx. \text{ Enfin puisque la suite } \left(\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \right)_{n \geq 1}$$

converge d'après la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} \ln(n) = +\infty$ alors

$$\int_1^{\sqrt{n}} \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\pi}{4} \ln(n)\right) \Rightarrow K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n).$$

III) 2) 3) La suite $(L_n)_{n \geq 1}$ est bornée en vertu de III) 2) 1) donc en utilisant la question précédente on a $L_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(K_n)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = +\infty$ d'où $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_n$ et donc $J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4} \ln(n)$.

III) 3) 1) On a $\|a\|^2 = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ et puisque $\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ alors

$$\|a\|^2 \leq 1 + \ln\left(\frac{n}{1}\right) = 1 + \ln(n).$$

III) 3) 2) Pour $(k, j) \in \{1, \dots, n-1\}^2$ posons $D_{n,k,j} = [k, k+1] \times [j, j+1]$; ainsi D_n est la réunion des rectangles $D_{n,k,j}$ dont les intersections sont d'aire nulle donc

$$I_n = \sum_{1 \leq k, j \leq n-1} \int_k^{k+1} \left(\int_j^{j+1} \frac{dy}{\sqrt{xy(x+y-1)}} \right) dx,$$

mais pour $(x, y) \in [k, k+1] \times [j, j+1]$ on a aisément $\int_k^{k+1} \left(\int_j^{j+1} \frac{dy}{\sqrt{xy(x+y-1)}} \right) dx \leq \int_k^{k+1} \left(\int_j^{j+1} \frac{dy}{\sqrt{kj(k+j-1)}} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{kj(k+j-1)}}$ donc $I_n \leq \sum_{1 \leq k, j \leq n-1} \frac{1}{\sqrt{kj(k+j-1)}} \leq \sum_{1 \leq k, j \leq n} \frac{1}{\sqrt{kj(k+j-1)}} = q_n(a)$ d'après la question II) 1) 1). Finalement en utilisant la question III) 1) 1) on conclut donc que $4J_n \leq q_n(a)$.

III) 3) 3) En vertu de II) 2) 3), pour tout $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ on a $q_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{q_n(x)}{\|x\|^2} \leq \pi \Rightarrow N(H_n) \leq \pi$; de plus $N(H_n) \geq q_n\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \frac{q_n(a)}{\|a\|^2} \geq \frac{4J_n}{1+\ln(n)}$ d'après les deux questions précédentes donc puisque $\frac{4J_n}{1+\ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi \ln(n)}{\ln(n)} = \pi$ suivant III) 2) 3), alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(H_n) = \pi$.

PARTIE IV

IV) 1) En multipliant par $(x+n)$ les deux membres de l'égalité $R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_{k,n}}{(x+k)}$ on a

$$\frac{\prod_{k=1}^n (x-k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (x+k)} = \lambda_{n,n} + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n} \frac{(x+n)}{(x+j)},$$

puis en remplaçant x par $-n$ on obtient: $\lambda_{n,n} = \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^n (n+k)}{(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)} = \frac{(n+1)\dots(2n)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$.

IV) 2) 1) Si $H_n = (h_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}, h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$, alors de IV) 1) on a $R_{n-1}(i) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j-1,n-1}}{i+j-1} = \sum_{j=1}^n \lambda_{j-1,n-1} h_{i,j}$.

Notons pour $1 \leq i \leq n, C_i$ la i -ième colonne de H_n alors $\det(A_n) = \det\left(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^n \lambda_{j-1,n-1} C_j\right)$.

Puisque le déterminant est une forme multilinéaire et alternée alors

$$\det(A_n) = \lambda_{n-1,n-1} \det(C_1, \dots, C_n) = \binom{2(n-1)}{n-1} \det(H_n).$$

IV) 2) 2) On a $R_{n-1}(i) = 0$ si $1 \leq i \leq n-1$ donc en développant suivant la dernière colonne, on a

$$\det(A_n) = R_{n-1}(n) \det(H_{n-1}) = \frac{(n-1)!}{n \dots (2n-1)} \det(H_{n-1}) = \frac{1}{(2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1}} \det(H_{n-1}).$$

Ainsi en utilisant la question précédente on a alors $\det(H_n) = \frac{1}{(2n-1) \binom{2(n-1)}{n-1}^2} \det(H_{n-1})$.

IV) 2) 3) Les valeurs propres de H_n sont strictement positives donc $\det(H_n) \neq 0$. D'après la question précédente,

$\frac{1}{\det(H_n)} = (2n-1) \left(\binom{2(n-1)}{n-1} \right)^2 \frac{1}{\det(H_{n-1})}$. On a donc $\frac{1}{\det(H_2)} = 12 \in \mathbb{N}^*$ et en utilisant ce qui précède, par récurrence aisée on a alors $\frac{1}{\det(H_n)} \in \mathbb{N}^*$ pour $n \geq 2$.

IV) 3) Pour $n \geq 2$ soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition " $\det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}$ "; comme $\det(H_2) = \frac{1}{12} = \frac{\Phi_1^4}{\Phi_3}$ alors $\mathcal{P}(2)$

est vraie; supposons $\mathcal{P}(n-1)$ vraie à un rang $n \geq 3$ alors grâce à IV) 2) 2), $\det(H_n) = \frac{((n-1)!)^4}{(2n-1)!(2n-2)!} \times \frac{\prod_{k=1}^{n-2} (k!)^4}{\prod_{k=1}^{n-3} k!} =$

$$\frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k!)^4}{2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} k!} = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}} \text{ donc } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie et donc pour tout } n \geq 2 \text{ on a } \det(H_n) = \frac{\Phi_{n-1}^4}{\Phi_{2n-1}}.$$