Concours Commun Mines-Ponts 2025

Épreuve de mathématiques I, MP & MPI, trois heures

(corrigé)

Inégalité de Hölder

1. Soit deux réels positifs x et y. Si x ou y est nul alors $xy = 0 \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. Sinon, on a $\frac{1}{p} \in [0, 1]$ et par concavité du logarithme sur $]0, +\infty[$ (on a en effet : $\forall u > 0$, $\ln''(u) = -\frac{1}{u^2} < 0$), on a :
$$\frac{1}{p}\ln\left(x^p\right) + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\ln\left(y^q\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)y^q\right).$$
d'où : $\ln(x \times y) \leqslant \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right)$. Comme exp est croissante, on peut conclure que dans tous les cas :
$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2. On remarque que comme l'univers est fini, les variables aléatoires admettent des moments à tout ordre.
Par positivité de l'espérance, on a : $\mathrm{E}(X^p) \geqslant 0$, et : $\mathrm{E}(Y^q) \geqslant 0$.
Premier cas. On suppose que $\mathrm{E}(X^p) = \mathrm{E}(Y^q) = 1$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :
$$|X(\omega)Y(\omega)| \leqslant \frac{|X(\omega)|^p}{p} + \frac{|Y(\omega)|^q}{q}$$
d'après la question précédente, donc $|XY| \leqslant \frac{1}{p}X^p + \frac{1}{q}Y^q$. D'où, par croissance et linéarité de l'espérance :
$$\mathrm{E}\left(|XY|\right) \leqslant \frac{1}{p}\mathrm{E}\left(X^p\right) + \frac{1}{q}\mathrm{E}\left(Y^q\right),$$
donc :
$$\mathrm{E}\left(|XY|\right) \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \mathrm{E}(X^p)\mathrm{E}(Y^q).$$
Deuxième cas. On suppose que $\mathrm{E}(X^p) > 0$ et $\mathrm{E}(Y^q) > 0$. Notons $\lambda = \mathrm{E}(X^p)$, $X' = \frac{1}{\lambda^{1/p}}X$, $\mu = \mathrm{E}(Y^p)$ et $Y' = \frac{1}{\mu^{1/q}}Y$. Ainsi on a $\mathrm{E}(|X'|^p) = \mathrm{E}(|Y'|^q) = 1$ et on peut appliquer le premier cas à X' et Y', donc :
$$\mathrm{E}\left(|X'Y'|\right) \leqslant \mathrm{E}(|X'|^p)\mathrm{E}(|Y'|^q)$$
et ainsi : $\mathrm{E}\left(\dfrac{XY}{\lambda^{1/p}\mu^{1/q}}\right) \leqslant 1$, ce qui donne :
$$\mathrm{E}\left(|XY|\right) \leqslant \lambda^{1/p}\mu^{1/q} = \mathrm{E}\left(X^p\right)^{1/p}\mathrm{E}\left(Y^q\right)^{1/q}.$$
Troisième cas. On suppose que $\mathrm{E}(X^p) = 0$ ou $\mathrm{E}(Y^q) = 0$. Sans perte de généralité, traitons le cas $\mathrm{E}(X^p) = 0$. Comme X^p est une variable aléatoire positive, on en déduit que X est nulle presque sûrement donc il en est de même pour XY et aussi pour XY. D'où : $\mathrm{E}(XY) = 0 = \mathrm{E}\left(X^p\right)^{1/p}\mathrm{E}\left(Y^q\right)^{1/q}$. On a donc bien : $\mathrm{E}(XY) \leqslant \mathrm{E}\left(X^p\right)^{1/p}\mathrm{E}\left(Y^q\right)^{1/q}$.
Conclusion. Dans tous les cas, on a : $\mathrm{E}(XY) \leqslant \mathrm{E}\left(X^p\right)^{1/p}\mathrm{E}\left(Y^q\right)^{1/q}$.

3. On reconnaît l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que nous redémontrons.
Si $\mathrm{E}(X^2) = 0$, alors X^2 est positive et d'espérance nulle, donc est nulle (presque sûrement). On en déduit que X est nulle et donc XY aussi. Par conséquent : $\mathrm{E}(XY) = 0 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y^2)$.

Supposons à présent que $\mathrm{E}(X^2)$ est non nul. L'application :

$$\lambda \mapsto \mathrm{E}\left((\lambda X+Y)^2\right) = \lambda^2 \mathrm{E}\left(X^2\right) + 2\lambda \mathrm{E}\left(XY\right) + \mathrm{E}\left(Y^2\right)$$

est positive sur $\mathbf{R}$ par croissance de l'espérance et est polynomiale du second degré en λ. Elle admet donc au plus une racine réelle : cela équivaut à la négativité de son discriminant Δ, qui est égal à $4\left(\mathrm{E}\left(XY\right) - \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)\right)$. D'où le résultat :

$$\mathrm{E}\left(XY\right) \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right).$$

Une inégalité de déviation

4. Soit $t \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k \geqslant \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k = \prod_{\ell=1}^{n} 2\ell = 2^n n!.$$

On en déduit, comme t^{2n} est positif pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(t^2\right)^n}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(t^2/2\right)^n}{n!}.$$

On reconnaît les développements en série entière du cosinus hyperbolique et de l'exponentielle. D'où le résultat :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}(t) \leqslant e^{t^2/2}.$$

5. Soient $t \geqslant 0$ et $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$. Par propriété de morphisme de l'exponentielle :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left(tc_i X_i\right)\right).$$

Les variables aléatoires X_i sont supposées indépendantes, donc les $\exp\left(tc_i X_i\right)$ le sont aussi par le lemme des coalitions. Donc :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\exp\left(tc_i X_i\right)\right).$$

Comme les X_i suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, par le théorème de transfert on a :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\exp\left(tc_i\right) + \exp\left(-tc_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ch}\left(tc_i\right).$$

On conclut grâce à la question précédente :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{(tc_i)^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right).$$

6. Soient $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ et $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$. Comme $\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)$ est une variable aléatoire positive, par l'inégalité de Markov et la question précédente on a :

$$\mathrm{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) > e^{tx}\right) \leqslant \frac{\mathrm{E}\left(\exp\left(x\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i\right)\right)}{e^{tx}} = e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}{2}\right).$$

Comme $-X_i$ suit aussi la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et que les $-X_i$ sont toutes indépendantes car les X_i le sont (lemme des coalitions), cette inégalité reste valable en remplaçant les X_i en $-X_i$. On obtient :

$$\mathrm{P}\left(\exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) > e^{tx}\right) \leqslant e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}{2}\right).$$

Comme la réalisation de $\exp\left(x\left|\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i\right|\right) > e^{tx}$ entraîne celle de $\exp\left(x\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i\right) > e^{tx}$ ou de $\exp\left(-x\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i\right) > e^{tx}$ (selon le signe de $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$), on a par croissance et sous-additivité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|\right) > e^{tx}\right) &\leqslant \mathrm{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) > e^{tx}\right) + \mathrm{P}\left(\exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) > e^{tx}\right) \\
&\leqslant 2e^{-tx} \exp\left(\frac{x^2 \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

7. Soient $t \geqslant 0$ et $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul. Comme l'exponentielle est strictement croissante, pour tout $x \geqslant 0$ on a :

$$\mathrm{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leqslant \mathrm{P}\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > xt\right) = \mathrm{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|\right) > e^{tx}\right).$$

La première inégalité n'est pas une égalité à cause du cas particulier $x = 0$. On en déduit, par la question précédente :

$$\mathrm{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leqslant 2\exp\left(\frac{x^2 \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}{2} - tx\right).$$

Posons $x = \frac{t}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2} \geqslant 0$. La division par $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = \|(c_1, \ldots, c_n)\|_2^{\mathbf{R}^n}$ est licite par propriété de séparation de la norme, car $(c_1, \ldots, c_n)$ est supposé non nul. On obtient :

$$\mathrm{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}\right),$$

d'où le résultat.

Inégalités de Khintchine

8. Notons que X étant finie, la fonction F_X est continue par morceaux (avec un nombre fini de discontinuités, en chaque $t \in \mathbf{R}$ tel que $\mathrm{P}(X = t) > 0$) et positive sur $\mathbf{R}$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\mathrm{d}t$ est bien définie dans $[0, +\infty]$. On la calcule avec la relation de Chasles. Notons $X(\Omega) = \{t_1, \ldots, t_k\} \subseteq \mathbf{R}_+$, où les t_i sont ordonnés en sens strictement croissant. On a $F_X(t) = 1$

pour $t < t_1$, puis $F_X(t) = \mathrm{P}(X > t_i)$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$ et tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$, et enfin $F_X(t) = 0$ pour $t > t_k$. On a donc dans $[0, +\infty]$, en ignorant les points isolés :

$$\begin{aligned}
p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) \mathrm{d}t &= \int_0^{t_1} p t^{p-1} \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X > t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} p t^{p-1} \mathrm{d}t \\
&= t_1^p + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X > t_i) \left(t_{i+1}^p - t_i^p\right) \\
&= t_1^p + \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X > t_i) t_{i+1}^p - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X > t_i) t_i^p \\
&= t_1^p + \sum_{i=2}^{k} \mathrm{P}(X > t_{i-1}) t_i^p - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(X > t_i) t_i^p \\
&= t_1^p - \mathrm{P}(X > t_1) t_1^p + \sum_{i=2}^{k} \left(\mathrm{P}(X > t_{i-1}) - \mathrm{P}(X > t_i)\right) t_i^p \\
&= \mathrm{P}(X \leqslant t_1) t_1^p + \sum_{i=2}^{k} \mathrm{P}(t_i \geqslant X > t_{i-1}) t_i^p \\
&= \mathrm{P}(X = t_1) t_1^p + \sum_{i=2}^{k} \mathrm{P}(X = t_i) t_i^p \\
&= \sum_{t \in X(\Omega)} t^p \mathrm{P}(X = t) \\
&= \mathrm{E}(X^p), && \text{(théorème de transfert)}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité. Comme X est finie, l'espérance de X^p l'est aussi, ce qui démontre en même temps la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) \mathrm{d}t$.

9. L'application $t \mapsto t^3 e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et admet pour primitive $t \mapsto -(t^2+2) e^{-t^2/2}$. On le démontre soit en intégrant par parties (on dérive $t \mapsto -t^2$ et intègre $t \mapsto -t e^{-\frac{t^2}{2}}$), soit en intégrant terme à terme le développement en série entière de cette fonction. Or, par croissances comparées, cette primitive a une limite finie (nulle) en $+\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$ converge et on a :
$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \left[-(t^2+2) e^{-t^2/2}\right]_0^{+\infty} = 2.$$
Appliquons la question précédente à la variable aléatoire $X = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i\right|$, qui est positive et finie. On a :
$$\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right) = \mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^4\right) = 4 \int_0^{+\infty} t^3 F_X(t) \mathrm{d}t.$$
La question 7 permet de majorer F_X. On a :
$$\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right) \leqslant 8 \int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}\right) \mathrm{d}t = 8 \int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t,$$
d'où le résultat.

10. Par linéarité de l'espérance :
$$\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} c_i c_j \mathrm{E}\left(X_i X_j\right).$$

Remarquons que les variables aléatoires suivant la loi de Rademacher sont centrées. Par conséquent, si les indices i et j sont distincts, par indépendance des variables aléatoires on a : $\mathrm{E}\left(X_i X_j\right)=\mathrm{E}\left(X_i\right)\mathrm{E}\left(X_j\right)=0$. D'où :

$$\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)=\sum_{i=1}^n c_i^2\mathrm{E}\left(X_i^2\right)=\sum_{i=1}^n c_i^2\mathrm{E}\left(1\right)=\sum_{i=1}^n c_i^2,$$

d'où le résultat.

Remarque. C'est le théorème de Pythagore ! Des variables de Rademacher indépendantes sont en effet orthogonales pour la forme bilinéaire symétrique $(X,Y)\mapsto\mathrm{E}(XY)$.

11. Je présume que β_p est indépendant des c_i et de n (l'indépendance en n intervient dans la question 18) : sinon, il n'y a rien à démontrer.
Soit $(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbf{R}^n$. Supposons $(c_1,\ldots,c_n)$ non nul et posons : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $d_i=\frac{c_i}{\|(c_1,\ldots,c_n)\|_2^{\mathbf{R}^n}}$.
Par homogénéité de la norme, on a : $\|(d_1,\ldots,d_n)\|_2^{\mathbf{R}^n}=1$, ce qui permet de démontrer, en imitant le raisonnement de la question 9 :

$$\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n d_i X_i\right)^p\right)\leqslant 2p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum\limits_{i=1}^n d_i^2}\right)\mathrm{d}t=2p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc :

$$\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|(c_1,\ldots,c_n)\|_2^{\mathbf{R}^n}\cdot\left(2p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

et par la question précédente on a : $\|(c_1,\ldots,c_n)\|_2^{\mathbf{R}^n}=\mathrm{E}\left(\left(\sum\limits_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. D'où le résultat si $(c_1,\ldots,c_n)$ est non nul, en posant :

$$\beta_p=\left(2p\int_0^{+\infty}t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},$$

qui est strictement positif parce que $t\mapsto t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $\mathbf{R}_+$ (l'intégrale converge parce que l'intégrande est continu et dominé par la fonction de Riemann intégrable $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).
Le résultat reste évidemment vrai pour $(c_1,\ldots,c_n)=(0,\ldots,0)$.
Autre démonstration. L'énoncé demande d'admettre que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathrm{L}^0(\Omega)$. C'est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie car Ω est fini : une partie génératrice est $\left\{\mathbb{1}_{\{\omega\}}\mid\omega\in\Omega\right\}$.
Les normes étant toutes équivalentes en dimension finie, il existe $\beta_p>0$ tel que pour tout $X\in\mathrm{L}^0(\Omega)$, on ait : $\|X\|_p\leqslant\beta_p\|X\|_2$. D'où le résultat :

$$\forall(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbf{R}^n,\quad\mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n c_i X_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\beta_p\mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cependant cela n'utilise pas la question précédente : ce n'était pas l'argument attendu par le concepteur du sujet, puisqu'il indique : « En déduire... »

12. Soit $X=\sum\limits_{i=1}^n c_i X_i$. On applique l'inégalité de Hölder avec le couple de variables aléatoires $(X^2,1)$ et avec $\frac{p}{2}$ au lieu de p (on a bien $\frac{p}{2}\geqslant 1$ par hypothèse). Soit $q\geqslant 1$ tel que : $\frac{1}{p/2}+\frac{1}{q}=1$. On a :

$$\mathrm{E}(X^2)\leqslant\mathrm{E}\left(|X|^{2\cdot\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}\mathrm{E}(1)^{\frac{1}{q}}=\mathrm{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{2}{p}},$$

d'où le résultat par croissance de la racine carrée.

Autre démonstration. On peut aussi utiliser le théorème de transfert et l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $t \mapsto t^{p/2}$, étant donné que $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = x) = 1$ (et parce qu'une probabilité est positive) :

$$\mathrm{E}\left(|X|^p\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = x)|x|^p \geqslant \left(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = x)|x|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \mathrm{E}\left(|X|^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

13. L'application $\theta \mapsto \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$ est continue sur $[0, 1]$, vaut $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ en 0 et $\frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ en 1. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que : $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$. D'où le résultat.
Remarque. On peut expliciter θ, qui est égal à $\frac{p}{4-p}$.
14. Soit $X = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$. On applique l'inégalité de Hölder avec le couple $\left(X^{2\theta}, X^{2(1-\theta)}\right)$ et avec $\frac{p}{2\theta}$ au lieu de p (on a bien $\frac{p}{2\theta} \geqslant 1$, puisque : $\frac{2\theta}{p} = 1 - \frac{1-\theta}{2} \leqslant 1$). On a :

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \mathrm{E}\left(X^{2\theta} X^{2(1-\theta)}\right) \leqslant \mathrm{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{2\theta}{p}} \mathrm{E}\left(|X|^{2(1-\theta)\cdot\frac{2}{1-\theta}}\right)^{1-\frac{2\theta}{p}} = \mathrm{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{2\theta}{p}} \mathrm{E}\left(|X|^4\right)^{\frac{1-\theta}{2}},$$

d'où le résultat.
15. Soit $X = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$. Si $X = 0$ alors l'inégalité voulue est triviale. Nous supposons donc X non nulle. On a par la question 11 :

$$\mathrm{E}\left(|X|^4\right)^{\frac{1-\theta}{2}} = \left(\mathrm{E}\left(X^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{2(1-\theta)} \leqslant \beta_4^{2(1-\theta)} \mathrm{E}\left(X^2\right)^{\frac{2(1-\theta)}{2}} = \beta_4^{2(1-\theta)} \mathrm{E}\left(|X|^2\right)^{1-\theta}.$$

Par la question précédente, on a donc :

$$\mathrm{E}\left(X^2\right) \leqslant \beta_4^{2(1-\theta)} \mathrm{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{2\theta}{p}} \mathrm{E}\left(X^2\right)^{1-\theta}.$$

Comme X est non nulle, on a $\mathrm{E}\left(|X|^2\right) > 0$, ce qui permet de diviser :

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)^{\theta} \leqslant \beta_4^{2(1-\theta)} \mathrm{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{2\theta}{p}}.$$

La fonction $u \mapsto u^{\frac{1}{2\theta}}$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$ car θ est positif. On en déduit :

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \beta_4^{\frac{1-\theta}{\theta}} \mathrm{E}\left(|X|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où le résultat en posant $\tilde{\alpha}_p = \beta_4^{-\frac{1-\theta}{\theta}} > 0$.
Autre démonstration. Comme à la question 11, il suffit d'utiliser l'équivalence des normes. Ce n'est cependant pas la philosophie du sujet, fort riche en imprécisions et ambiguïtés.
16. Il suffit de poser :

$$\alpha_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geqslant 2, \\ \tilde{\alpha}_p & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui est bien strictement positif (ce n'est pas demandé, mais permettre $\alpha_p \leqslant 0$ rend la question triviale et sans intérêt).

Une première conséquence

17. L'application φ est à valeurs dans $\mathbf{R}$, bilinéaire par distributivité du produit par rapport à l'addition et par linéarité de l'espérance. Elle est symétrique par commutativité du produit de fonctions réelles.

    Ensuite, par croissance de l'espérance : $\varphi(X,X) = \mathrm{E}(X^2) \geqslant 0$, car X^2 est positive. De plus, l'espérance d'une variable aléatoire positive est nulle si et seulement si elle est nulle (presque sûrement), donc $\varphi(X,X) = 0$ équivaut à $X = 0$: ainsi φ est définie positive.

    Ceci achève de démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathrm{L}^0(\Omega)$.

18. Soit $u = (u_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$. La somme $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$ est à support fini et existe bien. L'application $\psi(u) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_i X_i$ est donc une application de Ω dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire : $\psi(u) \in \mathrm{L}^0(\Omega)$.

    On veut démontrer que ψ conserve le produit scalaire. Comme ψ est linéaire, il suffit de démontrer que ψ préserve la norme euclidienne associée à φ, qui est $\|\cdot\|_2$. Or, pour tout $u \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, on a par la question 10 (que l'on peut bien utiliser car toutes les sommes sont en vérité à support fini) :

$$\|\psi(u)\|_2^2 = \mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{+\infty} u_i X_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i^2 = \langle u, u\rangle,$$

    d'où le résultat.

19. Par les questions 11 et 16, les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_p$ sont équivalentes sur R pour tout $p \geqslant 1$. Par transitivité, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur R pour tous p et q dans $[1, +\infty[$: d'où le résultat.

Une deuxième conséquence

20. Par la formule de transfert, avec le vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_k)$ (qui suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}^k$ par indépendance des X_i) et la fonction $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto \left|\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x_i\right|$, on a :

$$\mathrm{E}\left(f(X_1, \ldots, X_k)\right) = \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \frac{1}{2^k}\left|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i\right|,$$

    mais on a aussi :

$$\mathrm{E}\left(f(X_1, \ldots, X_k)\right) = \mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right).$$

    L'encadrement demandé revient donc à encadrer $2^k \mathrm{E}\left(\left|\sum\limits_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right) = n\mathrm{E}\left(\left|\sum\limits_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right)$. Par les questions 11 et 16 avec $p = 1$, on a :

$$\alpha_1 \mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right) \leqslant \beta_1 \mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

    Par la question 10 :

$$\alpha_1 \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right|\right) \leqslant \beta_1 \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{1/2},$$

    d'où le résultat après multiplication par $n \geqslant 1$.

21. Soit T l'application définie dans l'indication de l'énoncé. C'est une application linéaire de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R}^n$ (on a identifié $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^{\{-1,1\}^k}$ *via* la prescription d'un ordre sur les éléments de $\{-1,1\}^k$). Démontrons qu'elle est injective. Soit $(a_1,\dots,a_k) \in \mathbf{R}^k$ tel que $T(a_1,\dots,a_k)$ soit nul. Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Pour tout $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) \in \{-1,1\}^k$ on a : $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i = 0$. Prenons $\varepsilon_j = 1$ et tous les autres ε_i égaux à -1. On a :

$$a_j - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} a_i = 0.$$

En prenant $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_k = 1$, on a aussi :

$$a_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} a_i = 0.$$

En sommant ces deux égalités, on en déduit : $a_j = 0$. Ceci vaut pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, ce qui démontre que T est de noyau trivial et est donc injective. Elle induit un isomorphisme sur son image, donc $F = \operatorname{im}(T)$ est de dimension k.
Démontrons alors que les éléments de F vérifient l'encadrement de l'énoncé. Soit $x \in F$. Il existe $(a_1,\dots,a_k) \in \mathbf{R}^k$ tel que : $x = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right)_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k}$. D'après la question précédente :

$$\alpha_1 n\|(a_1,\dots,a_k)\|_2^{\mathbf{R}^k} \leqslant \|x\|_1^{\mathbf{R}^n} \leqslant \beta_1 n\|(a_1,\dots,a_k)\|_2^{\mathbf{R}^k}. \qquad (*)$$

Or :

$$\left(\|x\|_2^{\mathbf{R}^n}\right)^2 = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right)^2 = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\varepsilon_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} a_ia_j\varepsilon_i\varepsilon_j\right).$$

Simplifions la deuxième somme :

$$\sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} a_ia_j\varepsilon_i\varepsilon_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} a_ia_j \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_i\varepsilon_j.$$

Or, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, l'application $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j,\dots,\varepsilon_k) \mapsto (\varepsilon_1,\dots,-\varepsilon_j,\dots,\varepsilon_k)$ est une permutation de $\{-1,1\}^k$ car elle est involutive, donc pour tout $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ tel que $i<j$, on a :

$$\sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_i\varepsilon_j = -\sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \varepsilon_i\varepsilon_j.$$

Cette somme est donc nulle. On a démontré :

$$\left(\|x\|_2^{\mathbf{R}^n}\right)^2 = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \sum_{i=1}^{k} a_i^2\varepsilon_i^2 = 2^k\sum_{i=1}^{k} a_i^2 = n\|(a_1,\dots,a_k)\|_2^{\mathbf{R}^k}.$$

D'où le résultat, en extrayant la racine carrée dans l'égalité que l'on vient de démontrer et en reprenant $(*)$:

$$\alpha_1\sqrt{n}\|x\|_2^{\mathbf{R}^n} \leqslant \|x\|_1^{\mathbf{R}^n} \leqslant \beta_1\sqrt{n}\|x\|_2^{\mathbf{R}^n}.$$