

Corrigé Centrale PSI 2003 Maths 1

1 Polynômes de Hilbert

A- Inversion d'une matrice

1. $T_n(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$, donc le terme d'indice (i, j) de M_n est égal à $\binom{j}{i}$ pour $i \leq j$, et 0 pour $i > j$, i et j variant de 0 à n .
2. M_n est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux valent 1, donc son déterminant vaut 1 et elle est inversible. $T_n^{-1}(P) = P(X-1)$, d'où $T_n^{-1}(X^j) = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i$, donc le terme d'indice (i, j) de M_n^{-1} est égal à $(-1)^{j-i} \binom{j}{i}$ pour $i \leq j$, et 0 pour $i > j$, i et j variant de 0 à n .

B- Propriétés de la suite (H_i)

1. H_i étant de degré i , la famille $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ est échelonnée en degrés, elle forme donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. $0 \leq j \leq i-1 \implies H_i(j) = 0$
 $j \geq i \implies H_i(j) = \binom{j}{i}$
 $j < 0 \implies H_i(j) = (-1)^i \binom{-j+i-1}{i}.$

C- Polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$

1. Pour $0 \leq k \leq n$, $P(k) = \sum_{i=0}^n a_i H_i(k) = \sum_{i=0}^k a_i \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^n ({}^t M_n)_{ki} \cdot a_i$ soit $\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$
2. $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t M_n^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$, d'où $a_i = \sum_{j=0}^n ({}^t M_n^{-1})_{ij} \cdot P(j) = \sum_{j=0}^n (M_n^{-1})_{ji} \cdot P(j) = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j).$

Soit $i \geq n+1$. On se place dans $\mathbb{C}_i[X]$, i.e on remplace l'entier n par l'entier i .

On applique ce qui précède à $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$. La composante de P suivant H_i est nulle, donc

$$0 = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j).$$

3. $a \Rightarrow b$: La question C.2 donne le résultat.

$b \Rightarrow c$: La question B.2 montre que $H_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, or $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$, d'où $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

$c \Rightarrow a$: évident

D- Description des suites de la forme $(P(j))_{j \in \mathbb{N}}$ où P est un polynome

$a \Rightarrow b$: Pour $i \geq n+1$, $\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) = 0$ d'après C2.

$b \Rightarrow a$: On pose pour $i \in [0, n]$, $a_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j$, puis $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$.

$${}^t M_n^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t M_n^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \text{ donc } P(j) = u_j \text{ pour } 0 \leq j \leq n.$$

2 Quelques propriétés des séries entières

A- Représentation intégrale de $f(\omega)$ à partir des valeurs de f sur C_r

1. $f(re^{it})e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ avec $f_n(t) = a_n r^n e^{i(n-p)t}$. $|f_n(t)| = |a_n| r^n$ terme général d'une série convergente, donc $(\sum f_n)$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$, d'où en intervertissant somme et intégrale : $\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n 2\pi \delta_{n,p} = 2\pi a_p r^p$.
2. On pose $g_p(t) = \left(\frac{\omega}{re^{it}}\right)^p f(re^{it})$. On a $|f(re^{it})| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = M$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, donc $|g_p(t)| \leq M \left|\frac{\omega}{re^{it}}\right|^p$ et $\left|\frac{\omega}{re^{it}}\right| = \frac{|\omega|}{r} < 1$ donc la série de fonctions $(\sum g_p)$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$, or $\frac{re^{it}}{re^{it} - \omega} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{re^{it}}\right)^p$, d'où en intervertissant somme et intégrale : $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - \omega} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\omega^p}{2\pi r^p} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \omega^p = f(\omega)$.

B- Principe du maximum

1. La série entière $(\sum a_n z^n)$ étant normalement convergente sur tout disque fermé inclus dans D_R , f est continue sur D_R . Le cercle C_r est un compact inclus dans D_R , donc $|f|$ est bornée sur C_r et y atteint son maximum.
2. D'après A.2, $|f(\omega)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{|re^{it} - \omega|} M_f(r) \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{r M_f(r)}{r - |\omega|}$ car $|re^{it} - \omega| \geq r - |\omega| > 0$.
3. E_R est stable par produit (produit de Cauchy de 2 séries entières) donc par récurrence, f^p appartient à E_R . D'autre part, $M_{f^p}(r) = (M_f(r))^p$. En appliquant à f^p la question précédente, on obtient :

$$|f(\omega)|^p \leq \frac{r}{r - |\omega|} |M_f(r)|^p, \text{ d'où } |f(\omega)| \leq \left(\frac{r}{r - |\omega|}\right)^{1/p} |M_f(r)|.$$

Pour p tendant vers $+\infty$, on obtient $|f(\omega)| \leq M_f(r)$.

C- Division de $f(z) - f(\omega)$ par $z - \omega$ pour $f \in E_R$

1. $|a_n \omega^{n-1-j}| = \frac{1}{|\omega|^{j+1}} |a_n \omega^n|$ qui est le terme général d'une série convergente, d'où l'absolue convergence de la série proposée. car $\omega \in D_R$.
2. Puisque $|\omega| < r$, on a $|b_j r^j| \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} = \frac{1}{r} \sum_{n=j+1}^{\infty} |a_n| r^n \rightarrow 0$ en tant que reste de série convergente. A fortiori $b_j = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^j}\right)$.

3. Soit $z \in D_R$. On choisit r dans les deux intervalles $]|\omega|, R[$ et $] |z|, R[$. Dés lors, $|b_j z^j| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{|z|}{r}\right)^j\right)$, donc la série converge, et le rayon de convergence de $(\sum b_j z^j)$ est supérieur ou égal à R .

On pose $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$. $(z - \omega)g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{j-1} z^{j-1} - \sum_{j=0}^{\infty} \omega b_j z^j = -\omega z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (b_{j-1} - \omega b_j) z^j$.

Or $b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega^{n-1} = \frac{f(\omega) - f(0)}{\omega}$, et $b_{j-1} - \omega b_j = \sum_{n=j}^{\infty} a_n \omega^{n-j} - \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n \omega^{n-j}$ d'où

$$(z - \omega)g(z) = -f(\omega) + f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j = f(z) - f(\omega).$$

D- Minoration de $M_f(r)$ à l'aide des zéros de f

1. En appliquant la question C.3 à f au point z_1 , on obtient une fonction g_1 appartenant à E_R telle que $\forall z \in D_R$, $f(z) = (z - z_1)g_1(z)$.

En répétant l'opération successivement à chaque fonction g_j ainsi définie et pour chaque z_{j+1} , on construit une fonction G dans E_R telle que $\forall z \in D_R$, $G(z) \cdot \prod_{j=1}^p (z - z_j) = f(z)$ puis en multipliant G

par la fonction polynome $z \mapsto \prod_{j=1}^p (r^2 - \overline{z_j} z)$, on obtient une fonction F appartenant à E_R vérifiant l'égalité demandée.

2. $z\overline{z} = r^2$ donc $\left| \frac{r^2 - \overline{z_j} z}{z - z_j} \right| = \left| \frac{z_j - \frac{r^2}{\overline{z}}}{z - z_j} \right| \cdot |z| = r \cdot \left| \frac{z_j - z}{z - z_j} \right| = r$.

3. D'après D.1 et D.2, pour $z \in C_r \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$, $|F(z)| = |f(z)|r^p$, ceci s'étend en chaque point z_j par continuité de F et f , d'où $M_F(r) = M_f(r) \cdot r^p$.

D'après B3, $|F(0)| \leq M_F(r)$, soit $\frac{|f(0)r^{2p}|}{\left| \prod_{j=1}^p (-z_j) \right|} \leq M_f(r)r^p$, d'où $M_f(r) \cdot \left| \prod_{j=1}^p z_j \right| \geq |f(0)|r^p$.

4. On applique la question précédente à la fonction $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z^k}$. Elle vérifie les hypothèses de la partie D, d'où $M_g(r) \cdot \left| \prod_{j=1}^p z_j \right| \geq |g(0)|r^p$. Or $g(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ et $M_g(r) = \frac{M_f(r)}{r^k}$, soit :

$$M_f(r) \cdot \left| \prod_{j=1}^p z_j \right| \geq \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^{p+k}.$$

E- Etude asymptotique d'une fonction entière nulle sur $\mathbb{N}$

Si f est non nulle, on note k le plus petit indice tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$ ($k \geq 1$ car $f(0) = 0$). On choisit $r = p$, $z_j = j$ pour $1 \leq j \leq p$, qui sont bien des racines de f appartenant à $\overline{D_p} \setminus \{0\}$. En appliquant D4, on obtient donc $M_f(p)p! \geq |a_k|p^{p+k}$. Par hypothèse, $\exists A > 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$, $M_f(p) \leq A \cdot c^p$, soit $|a_k| \leq \frac{Ap!}{p^k p^p} c^p \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{p^k} \left(\frac{c}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}$ d'après Stirling. En faisant tendre p vers $+\infty$, on en déduit que $a_k = 0$, ce qui est contradictoire. Finalement, $f = 0$.

3 Théorème de Pólya

A- Majoration de $\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(k) \right|$

1. $F_n = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{X - k}$ avec $\alpha_k = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$.
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it} - 1) \cdots (re^{it} - n)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it} f(re^{it})}{re^{it} - k} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k).$
3. D'après A.2, $\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! M_f(r)}{(r-1) \cdots (r-n)} \frac{dt}{2\pi} = \frac{n! M_f(r)}{(r-1) \cdots (r-n)}.$

B- Preuve du théorème

1. En appliquant A3 à $r = 2n + 1$, il vient:

$$\varepsilon_n \stackrel{\text{def}}{=} \left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leq \frac{n!}{n(n+1) \cdots (n+n)} o\left(\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n}}\right) \stackrel{\text{Stirling}}{=} o\left(\frac{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2 2^{2n+1}}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \sqrt{n}}\right) = o(1).$$

(ε_n) est une suite d'entiers (hypothèse a) de limite nulle, donc elle est stationnaire à la valeur 0 à partir d'un certain rang N .

2. On applique la question I.D à la suite $u_k = f(k) : \exists P \in \mathbb{C}_{N-1}[X], \forall k \in \mathbb{N}, f(k) = P(k)$. Il en résulte que la fonction $f - P$ est entière, nulle sur $\mathbb{N}$ et $M_{f-P}(r) = o\left(\frac{2^r}{\sqrt{r}}\right) = o(2^r)$, or $2 < e$, donc en utilisant la question II.E, on en déduit que $f - P = 0$, et f est polynomiale.