

Concours d'Admission 1984

MP'

MATHEMATIQUES II
 (4 pages dactylographiées)

Dans tout le problème, \mathcal{E}_0 est un espace affine euclidien orienté de dimension 3, muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. \mathcal{S} désigne la surface formée des points de \mathcal{E}_0 dont les coordonnées (x, y, z) par rapport à \mathcal{R} vérifient l'équation $xy - z = 0$; le plan $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$ d'équation $z = 0$ est noté Π .

La partie III peut être abordée indépendamment des précédentes.

PREMIERE PARTIE

On étudie dans cette partie l'ensemble S des points M de Π possédant la propriété suivante : il existe quatre points A, B, C, D appartenant à \mathcal{S} et tels que ABCD soit un carré de côté $2\sqrt{2}$ et de centre M.

1°) Soit M un point de Π de coordonnées $(x, y, 0)$ dans \mathcal{R} , et A et C deux points de \mathcal{E}_0 , symétriques par rapport à M. A quelles conditions, portant sur (x, y) et sur les composantes (α, β, γ) du vecteur MA sur la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A et C sont-ils tous deux sur \mathcal{S} ?

Montrer que, si M appartient à S, le vecteur $\vec{F} = -y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k}$ est orthogonal au plan du carré.

2°) Montrer que pour tout t réel le point M défini par $\vec{OM} = t\vec{i}$ appartient à S. Donner en fonction de t les coordonnées des sommets du ou des carrés ABCD correspondant au point M. Construire les projections sur les trois plans $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$, $(0 ; \vec{i}, \vec{k})$, $(0 ; \vec{j}, \vec{k})$ de l'ensemble des sommets des carrés ainsi obtenus lorsque t décrit \mathcal{R} (on ne cherchera pas le sens de concavité des courbes étudiées).

3°) Soit M un point de Π , distinct de l'origine, et (r, θ) un système de coordonnées polaires de M par rapport à $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$, l'axe polaire étant $(0 ; \vec{i})$ et r étant positif.

On pose :

$$\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} (-r \sin \theta \vec{i} - r \cos \theta \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{U} = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{V} = \vec{k} \wedge \vec{U}$$

a) Déterminer, pour φ réel donné, les composantes sur $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du vecteur

$$\vec{T} = \cos \varphi \vec{U} + \sin \varphi \vec{V}$$

b) Trouver une relation de la forme :

$$(1) \quad R_1(r) \sin 2\theta + R_2(r) \sin 2\theta \cos 2\varphi + R_3(r) \cos 2\theta \sin 2\varphi = 0$$

donnant une condition nécessaire et suffisante pour que le point N défini par $\vec{MN} = 2\vec{T}$ appartienne à \mathcal{S} .

c) r et θ étant fixés, la relation (1) devient alors une équation en φ . A quelle condition, portant sur r et θ , existe-t-il un réel φ_0 tel que cette équation admette les quatre solutions $\varphi_0, \varphi_0 + \frac{\pi}{2}, \varphi_0 + \pi, \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}$?

d) Déterminer l'ensemble S. Un point M de S étant donné, combien de carrés solutions lui correspondent-ils ?

4°) On reprend les notations de la troisième question. On suppose de plus que $r \sin 2\theta \neq 0$ et que la condition trouvée au 13°c est réalisée. Montrer qu'alors la relation (1) équivaut à la relation :

$$(2) \cotg 2\varphi = k \cotg 2\theta$$

$$\text{où } k = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

5°) On pose toujours $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

a) Montrer qu'il existe une et une seule fonction Φ définie et continue sur \mathbb{R} , telle que $\Phi(0) = 0$ et vérifiant, pour tout x tel que $\cotg 2x$ existe, la relation :

$$\cotg (2 \Phi(x)) = k \cotg 2x$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on explicitera $\Phi(x)$, à l'aide des fonctions usuelles, lorsque x décrit l'intervalle $]m \frac{\pi}{2}, (m+1) \frac{\pi}{2} [$.

b) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi(x) - x$ est périodique. Etablir que Φ est continûment dérivable sur \mathbb{R} et calculer $\Phi'(x)$; préciser l'intervalle décrit par $\Phi'(x)$ quand x décrit \mathbb{R} . Construire la courbe représentative de Φ , en précisant sa concavité.

c) Donner une valeur approchée par excès à 10^{-3} près de la borne supérieure de $|\Phi(x) - x|$ quand x décrit \mathbb{R} .

DEUXIEME PARTIE

Dans toute cette partie, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, t désignant le temps :

$$\vec{OM}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$$

$$\vec{K}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{U}(t) = \sqrt{2} \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{U}(t)$$

$$\vec{I}(t) = \cos \Phi(t) \vec{U}(t) + \sin \Phi(t) \vec{V}(t)$$

$$\vec{J}(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{I}(t)$$

la fonction Φ étant celle définie en I 5°.

Soit \mathcal{E} l'espace affine euclidien lié au repère $(M; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dont la position par rapport à \mathcal{E}_0 à chaque instant t est le repère $(M(t); \vec{I}(t), \vec{J}(t), \vec{K}(t))$. On se propose l'étude de quelques propriétés du mouvement de \mathcal{E} par rapport à \mathcal{E}_0 .

1°) Montrer que ce mouvement est le seul mouvement par rapport à \mathcal{E}_0 d'un espace affine euclidien \mathcal{E} vérifiant les propriétés suivantes :

- il existe un point M lié à \mathcal{E} dont la position dans \mathcal{E}_0 est à chaque instant t le point $M(t)$ défini ci-dessus
- il existe un carré $ABCD$ lié à \mathcal{E} , de centre M , de côté $2\sqrt{2}$, tel que les positions dans \mathcal{E}_0 de ses sommets soient à chaque instant sur \mathcal{P} .

2°) Soit \mathcal{L} la droite (M, \vec{K}) de \mathcal{E} . Montrer que les points de \mathcal{L} ont des trajectoires planes et en préciser la nature.

3°) Montrer qu'à chaque instant t le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}(t)$ du mouvement est une combinaison linéaire de \vec{k} et $\vec{K}(t)$, dont on précisera les coefficients.

4°) a) Soit $C(t)$ la position à l'instant t du plan du carré $ABCD$ et $\Delta(t)$ son intersection avec Π . Ecrire une équation cartésienne de $\Delta(t)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que, parmi les points de \mathcal{E} qui sont sur $\Delta(t)$ à l'instant t , il en existe un et un seul dont le vecteur vitesse à cet instant soit parallèle à $C(t)$. Quelles sont les coordonnées dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la position $Q(t)$ de ce point de \mathcal{E} ?

c) Quand t décrit \mathbb{R} , $Q(t)$ décrit une courbe du plan Π ; la construire. Montrer que $\Delta(t)$ est la tangente en $Q(t)$ à cette courbe. La définition de $Q(t)$ permettait-elle de prévoir ce résultat ?

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, on étudie une approximation du mouvement de \mathcal{E} vu dans la partie II, fondée sur l'idée que $\Phi(t)$ est "peu différent" de t (cf. I 5°c).

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{OM}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$$

$$\vec{K}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{U}(t) = \cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{U}(t)$$

$$\vec{I}_1(t) = \cos t \vec{U}(t) + \sin t \vec{V}(t)$$

$$\vec{J}_1(t) = \vec{K}(t) \wedge \vec{I}_1(t)$$

Soit \mathcal{E}_1 l'espace affine euclidien lié au repère $(M ; \vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K})$ dont la position par rapport à \mathcal{E}_0 à chaque instant t est le repère $(M(t); \vec{I}_1(t), \vec{J}_1(t), \vec{K}(t))$.

On étudie le mouvement de \mathcal{E}_1 par rapport à \mathcal{E}_0 .

1°) Calculer les composantes sur $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_1(t)$ de ce mouvement à l'instant t .

2°) Montrer qu'il existe à tout instant t un axe instantané de rotation et glissement $d(t)$; donner une représentation paramétrique de $d(t)$ dans \mathcal{R} .

3°) Déterminer l'intersection avec chacun des deux plans définis dans \mathcal{R} par les équations $y = x$ et $y = -x$ de la surface Σ engendrée dans \mathcal{E}_0 par $d(t)$ quand t décrit \mathbb{R} .

4°) Soit A_1, B_1, C_1, D_1 les points de \mathcal{E}_1 dont les positions $A_1(t), B_1(t), C_1(t), D_1(t)$ à tout instant t vérifient :

$$\vec{MA}_1(t) = -\vec{MC}_1(t) = 2 \vec{I}_1(t)$$

$$\vec{MB}_1(t) = -\vec{MD}_1(t) = 2 \vec{J}_1(t)$$

a) Calculer en fonction de t les coordonnées $(X(t), Y(t), Z(t))$ du point $A_1(t)$ dans \mathcal{R} . Construire la projection orthogonale γ sur le plan Π de la trajectoire Γ de A_1 . Etablir l'invariance de γ dans une rotation que l'on précisera ; on pourra utiliser le nombre complexe $X(t) + i Y(t)$.

b) Calculer à 10^{-3} près par excès la borne supérieure lorsque t décrit \mathbb{R} de $|X(t) Y(t) - Z(t)|$.

c) Comment les trajectoires de B_1, C_1, D_1 se déduisent-elles de Γ ?