XLC 2012 (épreuve A)

Corrigé de Bernard Randé

1.a • Puisque $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})) = 4$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})) = 8$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ une matrice de trace nulle. Elle est dans $\mathcal{L}$ si et seulement si ${}^tA + \overline{A} = 0$, soit

$$x + \overline{x} = 0 \ ; \ y + \overline{z} = 0.$$

Posons $x = a + ib$ et $y = c + id$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Les conditions précédentes équivalent à $2a = 0$ et $z = -c + id$. Donc

$$A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} ib & c+id \\ -c+id & -ib \end{pmatrix}.$$

• De cela, il résulte que $\mathcal{L}$ est constitué des matrices de la forme $bE - cF + dG$, avec $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. Donc $\mathcal{L} = \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(E, F, G)$ (et en particulier E, F et G sont dans $\mathcal{L}$). Vérifions que (E, F, G) est libre sur $\mathbb{R}$. Si $bE - cF + dG = 0$, alors $A = 0$, donc $b = c + id = 0$, soit $b = c = d = 0$, ce que l'on voulait montrer.

1.b Il s'agit d'écrire le produit de matrices de taille 2, que nous donnons ci-dessous :

$$[E, F] = -2G \ ; \quad [F, G] = -2E \ ; \ [G, E] = -2F.$$

2.a Puisque $|||\cdot|||$ est sous-multiplicative,

$$|||\frac{A^k}{k!}||| \leqslant \frac{|||A|||^k}{k!}.$$

La série majorante est convergente (terme général d'une série exponentielle). Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est de dimension finie, il est complet pour n'importe quelle norme. La série de terme général $\frac{A^k}{k!}$ est donc absolument convergente, donc convergente.

2.b Puisque $X \mapsto P^{-1}XP$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres,

$$P^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\Big)P = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!}.$$

Le produit matriciel est continu. Le membre de gauche tend donc vers $P^{-1}(\exp A)P$. Comme le membre de droite tend vers $\exp(P^{-1}AP)$, on a l'égalité $P^{-1}(\exp A)P = \exp(P^{-1}AP)$.

2.c On a

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\Big)(i, i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A(i, i)^k}{k!}$$

puisque $T \mapsto T(i,i)$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres sur l'algèbre des matrices triangulaires supérieures. Par passage à la limite,

$$(\exp A)(i,i) = \exp(A(i,i)) = e^{\lambda_i}.$$

2.d Puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$, A est triangulable. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = P^{-1}TP$. D'après **2.b**, $\exp(A) = P^{-1}(\exp T)P$. Donc

$$\det(\exp A) = \det(\exp T) = \prod_i (\exp T)(i,i) = \prod_i \exp(T(i,i))$$

d'après **2.c**. Donc

$$\det(\exp A) = \exp(\sum_i T(i,i)) = \exp(\operatorname{tr} T) = \exp(\operatorname{tr} A).$$

3.a • Si $A \in U_2(\mathbb{C})$, $|\det A|^2 = 1$. Donc $U_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Montrons que $U_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On appelle « unitaires » les éléments de $U_2(\mathbb{C})$. On a $I_2 \in U_2(\mathbb{C})$. Si A et B sont unitaires,

$${}^t(AB)\overline{AB} = {}^tB{}^tA\overline{A}\,\overline{B} = {}^tB\overline{B} = I_n.$$

Enfin, si A est unitaire, $\overline{A} = ({}^tA)^{-1}$ et donc

$${}^t(A^{-1})\overline{A^{-1}} = I_2 \Leftrightarrow ({}^tA)^{-1}(\overline{A})^{-1} = I_2 \Leftrightarrow I_2 = I_2.$$

Donc $A^{-1} \in U_2(\mathbb{C})$.

• Puisque $\det : U_2(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes, son noyau $SU_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $U_2(\mathbb{C})$.

4. • Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, où $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Le calcul montre que

$${}^tA\overline{A} = I_2.$$

Comme $\det A = |a|^2 + |b|^2 = 1$, $A \in SU_2(\mathbb{C})$.

• Soit réciproquement $A \in SU_2(\mathbb{C})$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme $\det A = 1$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'égalité $\overline{A^{-1}} = {}^tA$ entraîne que

$$d = \overline{a} \text{ et } b = -\overline{c}.$$

Il en résulte que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

avec la condition supplémentaire que $|a|^2+|b|^2=1$, due à la condition $\det A=1$.

5.a Posons $< X,Y >:= {}^tX\overline{Y}$. Il s'agit d'un produit scalaire hermitien (linéaire à gauche, contrairement aux conventions du programme : victoire !), et la norme associée est la norme hermitienne préconisée par l'énoncé. Si $MX = \lambda X$, alors $< MX,X >= \lambda < X,X >$. D'un autre côté, pour tout Y,

$$< MX,Y >= {}^tX{}^tM\overline{Y} = {}^tX\overline{M}^{-1}\overline{Y} =< X,M^{-1}Y > .$$

Si l'on applique cette égalité à $Y = X$, on obtient que

$$\lambda < X,X >=< MX,X >=< X,\lambda^{-1}X >= \overline{\lambda}^{-1} < X,X > .$$

Comme $X \neq 0$, $< X,X >\neq 0$ et on obtient que $\lambda = \overline{\lambda^{-1}}$, soit $|\lambda|^2 = 1$.

5.b Supposons $< X,Y >= 0$. Alors

$$0 = \lambda^{-1} < X,Y >=< M^{-1}X,Y >=< X,MY >$$

et donc ${}^tX\overline{M}\,\overline{Y} = 0$.

6.a Soit $M \in SU_2(\mathbb{C})$. Soit X_1 un vecteur colonne propre de norme 1, associé à la valeur propre λ_1 (χ_M est scindé dans $\mathbb{C}$). Son orthogonal pour $< \cdot,\cdot >$ est de dimension 1. Soit X_2 un vecteur de norme 1 dirigeant cet orthogonal. D'après **5.b**, MX_2 est orthogonal à X_1, donc colinéaire à X_2. Posons $MX_2 = \lambda_2X_2$. Soit $Q = [X_1,X_2]$. Cette matrice est dans $U_2(\mathbb{C})$ car c'est la matrice de passage de la base canonique à la base orthonormée (X_1,X_2). En particulier, $|\det Q| = 1$. Considérons alors $R = [\alpha X_1,X_2]$. Alors $\det R = \alpha \det Q$. Choisissons α de sorte que $\det R = 1$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{\det Q}$. On a $|\alpha| = 1$, et donc la famille $(\alpha X_1,X_2)$ reste orthonormée. Donc $R \in SU_2(\mathbb{C})$. De plus, la matrice de l'endomorphisme canoniquement repéré par M est $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$ dans cette base. Puisque $|\lambda_1| = 1$, on peut poser $\lambda_1 = e^{i\theta}$, et alors $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ car $\det M = 1$. De plus, on a l'égalité $\mathrm{diag}(e^{i\theta},e^{-i\theta}) = R^{-1}MR$. La matrice $P := R^{-1} \in SU_2(\mathbb{C})$ répond à la question.

6.b • L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) provient de ce que deux matrices semblables ont même trace.

• Nous dirons que R est conjuguée à S dans $SU_2(\mathbb{C})$ lorsqu'il existe $P \in SU_2(\mathbb{C})$ telle que $R = P^{-1}SP$. C'est une relation d'équivalence, comme toujours dans un groupe. Posons $t := \mathrm{tr}\,R$. D'après **6.a**, R est conjuguée dans $SU_2(\mathbb{C})$ à une matrice de la forme $D(\theta) := \mathrm{diag}(e^{i\theta},e^{-i\theta})$. On a alors $t = 2\cos\theta$. Donc θ est unique au signe près et modulo 2π. Si $\mathrm{tr}\,S = t$, S est conjuguée soit à $D(\theta)$, soit à $D(-\theta)$. Il reste à montrer que ces deux matrices sont conjuguées dans $SU_2(\mathbb{C})$.

Or $G^{-1}D(\theta)G = D(-\theta)$, et $G \in SU_2(\mathbb{C})$. Cela permet de conclure.

7.a On a, puisque A et B commutent,

$$\frac{1}{l!}(A+B)^l = \sum_{j+k=l} \frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!}.$$

Par conséquent,

$$(\sum_{j\leqslant n}\frac{A^j}{j!})(\sum_{k\leqslant n}\frac{B^k}{k!})-\sum_{l\leqslant n}\frac{1}{l!}(A+B)^l = \sum_{j,k\leqslant n}\frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!}-\sum_{j+k\leqslant n}\frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!} = \sum_{(j,k)\in T_n}\frac{A^j}{j!}\frac{B^k}{k!}$$

où T_n est la différence ensembliste entre le carré $\{(j,k)\in [\![0,n]\!]^2\}$ et le triangle $\{(j,k)\ ;\ j+k\leqslant n\}$. Notons que le carré contient le triangle.

Il en résulte que

$$|||(\sum_{j\leqslant n}\frac{A^j}{j!})(\sum_{k\leqslant n}\frac{B^k}{k!}) - \sum_{l\leqslant n}\frac{1}{l!}(A+B)^l||| \leqslant \sum_{(j,k)\in T_n}\frac{|||A|||^j}{j!}\frac{|||B|||^k}{k!} =: \delta_n$$

par sous-additivité et sous-multiplicativité de la norme d'opérateur (et positivité des coefficients).

On peut faire le même calcul en remplaçant A par $a := |||A|||$ et B par $b := |||B|||$: ce sera donc un calcul dans $\mathbb{R}$. On obtient que

$$(\sum_{j\leqslant n}\frac{a^j}{j!})(\sum_{k\leqslant n}\frac{b^k}{k!}) - \sum_{l\leqslant n}\frac{1}{l!}(a+b)^l = \sum_{(j,k)\in T_n}\frac{a^j}{j!}\frac{b^k}{k!} = \delta_n.$$

Mais le premier membre de l'égalité ci-dessus tend vers $e^a e^b - e^{a+b} = 0$. Donc $\delta_n \to 0$ et, finalement

$$(\sum_{j\leqslant n}\frac{A^j}{j!})(\sum_{k\leqslant n}\frac{B^k}{k!}) - \sum_{l\leqslant n}\frac{1}{l!}(A+B)^l \to 0.$$

Par passage à la limite, compte tenu de la continuité du produit matriciel,

$$(\exp A)(\exp B) = \exp(A+B).$$

7.b Soit $A\in\mathcal{L}$. Puisque ${}^tA = -\overline{A}$, $[{}^tA, \overline{A}] = 0$ et donc

$$I_2 = \exp 0 = \exp({}^tA + \overline{A}) = (\exp {}^tA)(\exp \overline{A}).$$

Puisque ^{t} est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres sur $\mathbb{C}[A]$ et qu'il est continu sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a $\exp {}^tA = {}^t(\exp A)$. De même, puisque la conjugaison complexe est un morphisme continu de $\mathbb{R}$-algèbres sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\exp\overline{A} = \overline{\exp A}$. Il en résulte que $\exp A\in U_2(\mathbb{C})$. Comme $\det\exp A = \exp\operatorname{tr} A = 1$ d'après **2.d**, $\exp A\in SU_2(\mathbb{C})$.

7.c Soit $M\in SU_2(\mathbb{C})$. D'après **6.a**, il existe $P\in SU_2(\mathbb{C})$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tels que $M = P^{-1}D(\theta)P$. Or $D(\theta) = \exp(\theta E)$. Donc $M = \exp(\theta P^{-1}EP)$ d'après **2.b**. Mais $X := \theta P^{-1}EP\in\mathcal{L}$, car $\operatorname{tr} X = \theta\operatorname{tr} E = 0$, et

$${}^tX + \overline{X} = \theta({}^tPE^t(P^{-1}) - \overline{P^{-1}}E\overline{P}) = 0$$

puisque $P\in U_2(\mathbb{C})$.

Par conséquent, exp est une surjection de $\mathcal{L}$ sur $SU_2(\mathbb{C})$.

7.d On a $\exp 0 = \exp(2\pi E) = I_n$. Comme $2\pi E \in \mathcal{L}$, exp n'est pas injective sur $\mathcal{L}$.

8.a Soit $g \in G - \{I_2, -I_2\}$. D'après **6.a**, on peut écrire

$$g = P^{-1} D(\theta) P$$

avec $P \in SU_2(\mathbb{C})$. Alors $D(\theta) \notin \{I_2, -I_2\}$. Par conséquent, $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Et $D(\theta) \in G$ par hypothèse.

8.b On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} D(\theta) \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix} D(-\theta) = \begin{pmatrix} ae^{i\theta} & be^{-i\theta} \\ -\overline{b}e^{i\theta} & \overline{a}e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a}e^{-i\theta} & -be^{i\theta} \\ \overline{b}e^{-i\theta} & ae^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha = a\overline{a} + b\overline{b}e^{-2i\theta} = |a|^2 + (1 - |a|^2)e^{-2i\theta}.$$

8.c D'après **8.b**, comme $(AD(\theta)A^{-1})D(-\theta) \in G$ (produit de deux éléments de G), $\operatorname{tr} G$ contient $\alpha + \overline{\alpha} = 2(|a|^2 + (1 - |a|^2)\cos 2\theta)$ pour tout a tel que $|a| \leqslant 1$, car on peut alors construire un élément A de $SU_2(\mathbb{C})$ ayant la forme donnée en **4**. Autrement dit, $\operatorname{tr} G$ contient le segment $[2\cos 2\theta, 2]$. Comme $\cos 2\theta \neq 1$, on a bien $\cos 2\theta < 2$.

9. Dans la question **8.c**, nous avons montré précisément que, si $2\cos\alpha \in \operatorname{tr} G$, alors $[2\cos 2\alpha, 2] \subset \operatorname{tr} G$. Considérons θ comme ci-dessus. Soit n un entier naturel non nul tel que $\cos\frac{\pi}{2n} \in [\cos 2\theta, 1]$. Un tel n existe puisque $\cos\frac{\pi}{2n} \to 1$ par valeurs inférieures. Posons $\alpha := \frac{\pi}{2n}$. Alors $D(\alpha) \in G$ d'après **6.b**. Par conséquent, $D(\alpha)^n \in G$. Or $\operatorname{tr} D(\alpha)^n = 2\cos n\alpha$. Donc $2\cos n\alpha \in \operatorname{tr} G$ et, d'après ce qui vient d'être dit, $[2\cos 2n\alpha, 2] = [-2, 2] \subset \operatorname{tr} G$. Par conséquent, $D(\beta) \in G$ pour tout β et donc, d'après **6.a**, G contient $SU_2(\mathbb{C})$.

10. • On a

$$[e, z] = [e, f] + i[e, g] = -2g + 2if = 2iz.$$

• De même,

$$[e, w] = [e, f] - i[e, g] = -2g - 2if = -2iw.$$

• Enfin,

$$[z, w] = (f + ig)(f - ig) - (f - ig)(f + ig) = 2i(gf - fg) = 4ie.$$

11. Montrons par récurrence sur k que $(ez^k)(v) = \mu_k z^k(v)$. Le résultat est vrai pour $k = 0$ avec $\mu_0 = \lambda$. Supposons-le vrai au rang k. Alors $(ez - ze)z^k = 2iz^{k+1}$, donc

$$(ez^{k+1})(v) - \mu_k z^{k+1}(v) = 2iz^{k+1}(v).$$

Donc $\mu_{k+1} = \mu_k + 2i$ répond à la question.

12. Puisque $\mu_k = 2ik + \mu_0$, la suite (μ_k) est injective. Comme e n'admet qu'un nombre fini de valeurs propres, il existe k tel que $z^k(v) = 0$. Notons encore k le plus petit de ces entiers. Alors $k \geqslant 1$ car $v \neq 0$. Posons $v_0 = z^{k-1}(v)$. On a $v_0 \neq 0$, $z(v_0) = 0$ et $e(v_0) = \mu_{k-1}v_0$. Ainsi, v_0 répond à la question. On pose $\lambda_0 := \mu_{k-1}$.

13. • On a $e(v_0) = \lambda_0 v_0$. Montrons par récurrence sur $k \geqslant 0$ que $e(v_k) = \lambda_k v_k$. Supposons ce résultat vrai au rang k.

On a $v_{k+1} = w(v_k)$. Comme $ew - we = -2iw$,

$$e(v_{k+1}) - \lambda_k v_{k+1} = -2iv_{k+1}$$

et donc $\lambda_{k+1} = \lambda_k - 2i$ convient. Donc $\lambda_k = \lambda_0 - 2ik$, et

$$e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)v_k.$$

• On part de l'égalité $zw - wz = 4ie$. Appliquée à v_k, elle donne

$$z(v_{k+1}) - w(z(v_k)) = 4ie(v_k) = 4i(\lambda_0 - 2ik)v_k.$$

Montrons par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $z(v_k) = \mu_k v_{k-1}$.

Pour $k = 0$, la relation ci-dessus donne

$$z(v_1) = 4i\lambda_0 v_0.$$

Donc $\mu_1 = 4i\lambda_0$.

Supposons la relation vraie au rang k. Alors

$$z(v_{k+1}) = \mu_k v_k + 4i(\lambda_0 - 2ik)v_k.$$

Donc $\mu_{k+1} = \mu_k + 4i(\lambda_0 - 2ik)$.

Il en résulte que $\mu_k - \mu_1 = 4i(k-1)\lambda_0 + 8\frac{(k-1)k}{2}$, donc que $\mu_k = 4ik\lambda_0 + 4(k-1)k$.

14.a La suite (λ_k) étant injective, il existe k tel que $v_k = 0$. Soit $n+1$ le plus petit de ces entiers (v_0 est non nul). Alors $v_{n+1} = 0$. De plus, $(v_0, \dots, v_n)$ est une famille de vecteurs propres (non nuls) de e associés à des valeurs propres distinctes. C'est donc une famille libre.

14.b • On a $z(v_{n+1}) = 0$, donc $\mu_{n+1} v_n = 0$ et, comme $v_n \neq 0$, $\mu_{n+1} = 0$, soit $4i(n+1)\lambda_0 = -4n(n+1)$. Donc $i\lambda_0 = -n$, soit $\lambda_0 = in$, et $e(v_k) = (\lambda_0 - 2ik)v_k = i(n-2k)v_k$ pour tout k (y compris $k = n$ et $k = 0$).

• On a $z(v_k) = (-4kn + 4k(k-1))v_{k-1} = -4k(n-k+1)v_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$. En particulier, $z(v_n) = -4nv_{n-1}$.

• Bien sûr, $w(v_k) = v_{k+1}$ pour tout $k \geqslant 0$. En particulier, $w(v_n) = 0$.