

Notations

$\mathcal{E}$  est un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal direct  $R = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Si  $M$  est un point quelconque de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $R$ , on écrit  $M = (x, y, z)$ . Le plan  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est noté plus simplement  $xOy$ . Un plan (resp. une droite) parallèle au plan  $xOy$  est dit(e) horizontal(e). Un plan (resp. une droite) perpendiculaire au plan  $xOy$  est dit(e) verticale.

**Les cinq parties sont largement indépendantes les unes des autres.**

Partie I - Étude d'une forme différentielle

Soit  $\omega$  la forme différentielle définie en tout point  $M = (x, y, z)$  de  $\mathcal{E}$  par :

$$\omega(M) = -4xy^2z \, dx + 4x^2yz \, dy + (x^4 - y^4) \, dz \quad (1)$$

et soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des points  $M = (x, y, z)$  tels que  $x^2 - y^2 \neq 0$ .

**I.A** - Dessiner l'ensemble des points  $M = (x, y, z)$  tels que  $x^2 - y^2 = 0$ .

**I.B** - Soit  $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**I.B.1)** Écrire une équation différentielle linéaire du premier ordre à laquelle doit satisfaire  $\varphi$  pour que la forme différentielle  $\Omega$  définie en tout point  $M = (x, y, z)$  de  $\mathcal{D}$  par  $\Omega(M) = \varphi(x^2 - y^2)\omega(M)$  soit exacte.

**I.B.2)** Déterminer alors  $\varphi$  telle que :  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(-1) = 1$ .

**I.C** - En déduire une fonction  $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que :

$$dU = \Omega \quad (2)$$

$$\text{Pour tout } M = (x, y, z) \text{ de } \mathcal{D} \text{ tel que } z = 0, \quad U(M) = 0 \quad (3)$$

Partie II - Étude des surfaces de niveau de  $U$ 

On appelle **surface de niveau** de  $U$  toute partie  $\Sigma_\lambda$  de  $\mathcal{D}$  définie par  $U(M) = \lambda$  où  $\lambda$  est un réel donné.

**II.A** - Montrer que, pour tout réel  $\lambda$ , l'étude de  $\Sigma_\lambda$  se ramène à celle de l'ensemble  $S_\lambda$  défini par l'équation

$$z(x^2 + y^2) - \lambda(x^2 - y^2) = 0 \quad (4)$$

**II.B** - Donner des éléments de symétrie de  $S_\lambda$ .

**II.C** -

**II.C.1)** Quel est l'ensemble  $S_0$  ?

**II.C.2)** Pour  $\lambda \neq 0$ , comment l'ensemble  $S_{-\lambda}$  se déduit-il de l'ensemble  $S_\lambda$  ?

**Dans toute la suite du problème, on suppose  $\lambda > 0$ .**

**II.D** - Étude de l'intersection  $C_{\lambda,1}$  de  $S_\lambda$  avec le plan  $P_1$  d'équation  $z = x\sqrt{3} - y$ .

**II.D.1)** Écrire une équation polaire de la projection orthogonale  $C'_{\lambda,1}$  de  $C_{\lambda,1}$  sur le plan  $xOy$ .

**II.D.2)** Construire  $C'_{\lambda,1}$ . On précisera notamment les tangentes à l'origine, l'asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote. La recherche systématique des points multiples et des points d'inflexion n'est par contre pas demandée.

**II.E** - Étude de l'intersection  $C_{\lambda,2}$  de  $S_\lambda$  avec le plan  $P_2$  d'équation  $z = x$ .

**II.E.1)** Montrer que la projection orthogonale  $C'_{\lambda,2}$  de  $C_{\lambda,2}$  sur le plan  $xOy$  peut être représentée paramétriquement par

$$\begin{cases} x = \lambda \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \lambda \frac{t-t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (5)$$

**II.E.2)** Construire  $C'_{\lambda,2}$ . On précisera notamment les tangentes à l'origine, l'asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote. La recherche systématique des points multiples et des points d'inflexion n'est par contre pas demandée.

**II.E.3)**  $C'_{\lambda,2}$  présente une boucle. Montrer que la longueur  $L$  de cette boucle est donnée par :

$$L = 2\lambda \int_0^1 \frac{\sqrt{t^4 + rt^2 + s}}{t^2 + 1} dt$$

où  $r$  et  $s$  sont deux réels que l'on explicitera. Donner, sans chercher à calculer exactement l'intégrale, une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $L/(2\lambda)$ .

**II.E.4)** Calculer l'aire  $A$  intérieure à la boucle précédente. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $A/\lambda^2$ .

### Partie III - Étude des droites tracées sur $S_\lambda$

**III.A** -

**III.A.1)** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que l'intersection de  $S_\lambda$  avec le plan  $\Pi_t$  d'équation  $y = tx$  est la réunion d'une droite verticale, que l'on précisera, et d'une droite horizontale  $\Delta_{\lambda,t}$  dont on explicitera un système d'équations.

**III.A.2)** En déduire l'ensemble des droites horizontales incluses dans  $S_\lambda$ .

**III.B** -

**III.B.1)** Établir que toute droite non horizontale de  $\mathcal{E}$  peut être définie de façon unique par un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \quad a, b, p, q \text{ réels} \quad (6)$$

**III.B.2)** Déterminer les droites non horizontales tracées sur  $S_\lambda$ .

### Partie IV - Définition géométrique de $S_\lambda$

**IV.A** - Soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $S_\lambda$  et soit  $t \in \mathbb{R}$ . Écrire les coordonnées de la projection orthogonale  $H_{0,t}$  de  $M_0$  sur la droite définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} y = tx \\ z = \lambda \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad (7)$$

**IV.B** - Montrer que, quand  $t$  varie dans  $\mathbb{R}$ ,  $H_0$  appartient à un plan fixe  $Q_0$  dont on donnera une équation. Vérifier que  $M_0 \in Q_0$ .

**IV.C** - Donner une équation de la projection orthogonale  $\Gamma'_0$  sur le plan  $xOy$  de la courbe  $\Gamma_0$  décrite par  $H_{0,t}$  quand  $t$  varie dans  $\mathbb{R}$  et en déduire la nature géométrique de  $\Gamma_0$ .

**IV.D** - À partir des trois questions précédentes, donner une définition géométrique de la surface  $S_\lambda$ .

Partie V - Étude de certaines courbes tracées sur  $S_\lambda$

Dans toute cette dernière partie, on note  $(\rho, \theta, z)$  un système de coordonnées semi-polaires (ou cylindriques) de  $M = (x, y, z)$  et on ne considère que ceux des points  $M$  pour lesquels  $\rho \neq 0$ . On rappelle que, si  $\vec{u}$  est le vecteur de coordonnées  $(\cos \theta, \sin \theta)$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et si  $\vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{u}$ , on a :  $\vec{OM} = \rho \vec{u} + z \vec{k}$ .

**V.A** - Écrire une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier  $(\rho, \theta, z)$  pour que  $M$  appartienne à  $S_\lambda$ .

**V.B** - Soit  $M$  un point de  $S_\lambda$  de coordonnées semi-polaires  $(\rho, \theta, z)$  avec  $\rho \neq 0$ .

Trouver  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(\alpha, \beta, \rho)$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$  soit normal en  $M$  à  $S_\lambda$ .

**V.C** - Soit  $\psi : ]0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}^*$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . La relation  $\rho = \psi(\theta)$  définit une courbe tracée sur  $S_\lambda$ .

Donner les coordonnées dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$  d'un vecteur  $\vec{N}$  orthogonal au plan osculateur à  $L_{\lambda, \psi}$  au point  $M$  de  $S_\lambda$  de coordonnées semi-polaires  $(\psi(\theta), \theta, z)$ .

**V.D** -

**V.D.1)** À quelle condition le plan osculateur en  $M$  à  $L_{\lambda, \psi}$  et le plan tangent en  $M$  à  $S_\lambda$  coïncident-ils constamment lorsque  $i$  parcourt  $L_{\lambda, \psi}$  ?

**V.D.2)** Expliciter alors  $\psi$ .

**V.D.3)** Construire la projection orthogonale sur le plan  $xOy$  de la courbe  $L_{\lambda, \psi}$  qui passe par le point  $A$  de coordonnées  $(1, 1, 0)$  dans  $R$ .

---

• • • FIN • • •

---