1 Une norme

1.1

Avec $A = (a_{i,j}), B = (b_{p,q})$ on trouve

$$Tr(AB) = \sum_i (\sum_k a_{i,k} b_{k,i}) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{j,i} = \sum_j (\sum_k b_{j,k} a_{k,j}) = Tr(BA)$$

1.2

- Par la question précédente Φ est symétrique.
- Par linéarité de la trace, Φ est linéaire (par exemple) à gauche, et par symétrie aussi à droite.
- $Tr(A^t A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \|A\|^2$ est positif, et même strictement sauf si tous les coefficients sont nuls: donc Φ est définie positive.

C'est donc bien un produit scalaire (c'est LE produit scalaire "standard" dans la base canonique).

1.3

L'inegalité demandée n'est autre que Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)^2 = (\Phi(I, A))^2 \leq \|I\|^2 \times \|A\|^2 = n \times \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$$

On a donc pour toute matrice $|Tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
Or pour $A = I$ on a une égalité, donc la majoration est optimale ce qui signifie que $|||Tr||| = \sqrt{n}$.

1.4

ATTENTION ! Ω est une isométrie... de $\mathbb{R}^n$ euclidien dans lui-même, et pas dans $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$. Il faut un calcul:

$$\|\Omega A\|^2 = Tr(\Omega A^t(\Omega A)) = Tr(\Omega A^t A.{}^t\Omega) = Tr({}^t\Omega.\Omega A^t A) = Tr(A^t A) = \|A\|^2$$

en utilisant la première question, puis le fait que Ω est orthogonale.
Si A est symétrique alors ${}^tB = {}^t({}^t\Omega A\Omega) = {}^t\Omega^t A^t({}^t\Omega) = {}^t\Omega^t A\Omega = B$.
De plus, en appliquant la propriété juste démontrée, on a $\|A\|^2 = \|B\|^2$ ce qui est exactement la relation demandée.

2 Diagonalisation pour $n = 2$

2.1

Il vient $B = \begin{pmatrix} a_{11}\cos^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta & a_{11}\sin\theta\cos\theta + a_{1,2}\cos 2\theta - a_{22}\sin\theta\cos\theta \\ a_{11}\sin\theta\cos\theta + a_{1,2}\cos 2\theta - a_{22}\sin\theta\cos\theta & a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\cos^2\theta \end{pmatrix}$ (ouf !)

2.2

Sans calculs (comme quoi il faut BIEN lire les énoncés) par la dernière question de la partie précédente:

$$\sum_{i=1}^2 b_{i,i}^2 + 2b_{2,1}^2 = \|B\|^2 = \|A\|^2 = \sum_{i=1}^2 a_{i,i}^2 + 2a_{2,1}^2$$

2.3

$b_{2,1}=(a_{11}-a_{22})\dfrac{\sin 2\theta}{2}+a_{1,2}\cos 2\theta=0$ pour:

- $a_{11}=a_{22}$ et $\theta=\pi/4$, ou bien
- $a_{11}\neq a_{22}$ et $(a_{2,2}-a_{1,1})\tan 2\theta=2a_{2,1}$ ce qui définit bien un et un seul θ dans l'intervalle prescrit.

θ ne peut être nul pusque l'on a exclu le cas $a_{1,2}=0$.
On peut poser $F(A)=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{2a_{2,1}}{a_{2,2}-a_{1,1}}$ avec la convention $F=\pi/4$ quand $a_{11}=a_{22}$.

2.4

B étant symétrique, si on a annulé un terme non diagonal c'est que B est diagonale, point. Comme B est orthogonalement semblable à A par définition de B, c'est que ses termes diagonaux sont les valeurs propres de A.

2.5 Exemple:

Pour $A=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1&12\\12&-6\end{pmatrix}$ il vient $F(A)=\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{24}{-6-1}=-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{24}{7}$.
On en tire (plus rapide à la machine...) $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ et $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$, d'où peu après

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}\cos^2\theta-24\cos\theta\sin\theta-6\sin^2\theta & 0\\ 0 & \sin^2\theta-24\cos\theta\sin\theta-6\cos^2\theta\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}\dfrac{16}{25}+24\dfrac{12}{25}-6\dfrac{9}{25} & 0\\ 0 & \dfrac{9}{25}-24\dfrac{12}{25}-6\dfrac{16}{25}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce que l'on aurait trouvé plus facilement avec le polynôme caractéristique, certes.

3 Quelques résultats

3.1

Remarquons seulement que Ω est orthogonale (c'est une rotation plane, ou alors on peut vérifier que les colonnes forment une base orthonormale). Donc les résultats de la fin de la partie I s'appliquent.

3.2 Coefficients de B

3.2.1

Compte tenu de ce que les seules colonnes qui bougent sont celles de numéros p et q, $m_{i,j}=a_{i,j}$ est inchangé et

- $m_{i,p}=\cos\theta\, a_{i,p}-\sin\theta\, a_{i,q}$
- $m_{i,q}=\sin\theta\, a_{i,p}+\cos\theta\, a_{i,q}$

3.2.2

Les seules lignes qui bougent sont celles de numéros p et q. Donc si i,j ne prennent aucune de ces deux valeurs,

- $b_{i,j}=a_{i,j}$ est inchangé. Sinon on retombe progressivement sur le cas du II:
- Pour i "général" on a encore $b_{i,p}=\cos\theta\, a_{i,p}-\sin\theta\, a_{i,q}$
- $b_{i,q}=\sin\theta\, a_{i,p}+\cos\theta\, a_{i,q}$
- $b_{p,q}=b_{q,p}=a_{p,p}\sin\theta\cos\theta+a_{p,q}\cos 2\theta-a_{q,q}\sin\theta\cos\theta$
- $b_{p,p}=a_{p,p}\cos^2\theta-2a_{p,q}\cos\theta\sin\theta+a_{q,q}\sin^2\theta$
- $b_{q,q}=a_{p,p}\sin^2\theta-2a_{p,q}\cos\theta\sin\theta+a_{q,q}\cos^2\theta$

3.2.3

Pour ceux qui ne s'en doutaient pas (ce problème est vraiment bien guidé !) on retrouve exactement les mêmes relations qu'au II.
Donc la norme (des matrices extraites) est conservée, et...

3.2.4

...il existe une et une seule valeur de θ choisie dans $]-\pi/4, \pi/4] \setminus \{0\}$ qui annule $b_{p,q}$. C'est démontré au II !

4 Un peu de topo

4.1

4.1.1

Si la propriété était fausse, on aurait un rayon ε tel que pour toute valeur de n, il existerait des indices k plus grands que n (bref, des indices arbitrairement grands) tels que x_k n'appartienne pas à la réunion des boules centrés sur les valeurs d'adhérence, et de rayon ε – ouf.
Mais de cette infinité de termes de la suite hors-les-boules, on pourrait extraire une sous-suite convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass, puisque la suite est bornée.
On aurait alors une nouvelle valeur d'adhérence, qui n'appartiendrait à aucune des boules susdites. Par le critère de Virenque, c'est qu'on nous z'aurait menti quant à la liste des valeurs d'adhérence: et donc notre hypothèse de départ est fausse, cqfd.

4.1.2

Il est temps d'utiliser le choix (3) dans les hypothèses.
Choisissons ε tel que toutes les valeurs a_μ soient distantes de plus de 4ε (strictement): $0 < 4\varepsilon < \inf\limits_{\mu \neq \nu} \|a_\mu - a_\nu\|$.
Considérons le n_ε que nous savons y associer grâce à la question précédente, et soit n' tel que pour $k \geq n'$ $\|x_{k+1} - x_n\| < \varepsilon$: je dis que toute la suite reste dans une même boule, pour $k \geq n_0 = \max(n', n_\varepsilon)$.
En effet, si on avait $x_k \in B(a_\mu, \varepsilon)$ et $x_{k+1} \in B(a_\nu, \varepsilon)$avec ν différent de μ, alors $\|x_{k+1} - x_k\| \geq \|a_\mu - a_\nu\| - 2\varepsilon \geq 2\varepsilon$ par l'inégalité triangulaire ou un beau dessin ou un peu de bon sens: or ceci contredit le choix de ε.

Or dans cette boule il y a une seule valeur d'adhérence, donc (par un argument similaire à la question précédente) la suite converge vers icelle, cqfd.

5 Enfin, la méthode !

Notons que la condition définissant θ est donnée ici par l'énoncé, une prime pour ceux qui savent lire...

5.1

Le choix de θ_k permet donc d'annuler le terme $a_{p,q}^{(k+1)}$ (ex $b_{p,q}$).

5.2

5.2.1

$\varepsilon_k = \sum\limits_{i \neq j} (a_{i,j}^{(k)})^2 \leq \sum\limits_{i \neq j} |a_{p,q}^{(k)}|^2 = n(n-1)|a_{p,q}^{(k)}|^2$ par définition de p et q.

5.2.2

On remplace les termes qui changent: (c'est plutôt III.B.2 qui sert, je trouve)

$$\begin{aligned}\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1} &= \sum_{i \notin \{p,q\}} |a_{i,p}^{(k)}|^2 + \sum_{i \notin \{p,q\}} |a_{i,q}^{(k)}|^2 + 2|a_{p,q}^{(k)}|^2 - \sum_{i \notin \{p,q\}} |a_{i,p}^{(k+1)}|^2 - \sum_{i \notin \{p,q\}} |a_{i,q}^{(k+1)}|^2 - 2|a_{p,q}^{(k+1)}|^2 \\ &= \sum_{i \notin \{p,q\}} (\cos\theta\, a_{i,p}^{(k)} - \sin\theta\, a_{i,q}^{(k)})^2 + \sum_{i \notin \{p,q\}} (\sin\theta\, a_{i,p}^{(k)} + \cos\theta\, a_{i,q}^{(k)})^2 + 2|a_{p,q}^{(k)}|^2 - \sum_{i \notin \{p,q\}} |a_{i,p}^{(k)}|^2 = 2|a_{p,q}^{(k)}|^2\end{aligned}$$

5.2.3

En utilisant les deux résultats précédents, il vient d'abord $-2|a_{p,q}^{(k)}|^2 \leq -\dfrac{2}{n(n-1)}\varepsilon_k$, puis

$$0 \leq \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2|a_{p,q}^{(k)}|^2 \leq \varepsilon_k\Big(1 - \frac{2}{n(n-1)}\Big)$$

Il en résulte que $(\varepsilon_k)_k$ est dominée par une suite géométrique de raison < 1, et donc tend vers 0.
Cela signifie que la suite de matrices (B_k) tend vers 0 dans l'espace vectoriel normé $(\mathrm{Mat}(\mathbb{R}, n), || \, ||)$.

5.3

5.3.1

$\Delta = \lim D_{k_l}$ appartient au même espace vectoriel (fermé) que tous les D_{k_l}, c'est à dire l'espace des matrices diagonales .

5.3.2

Par construction, le polynôme caractéristique de A reste égal à celui de A_k.
Or la (sous-)suite B_{k_l} tend vers 0, donc les coefficients du polynôme caractéristique de Δ_{k_l}, qui dépendent continuement (ce sont des fonctions polynômes) des coefficients de la matrice, tendent vers ceux de A_{k_l} qui sont exactement ceux du polynôme caractéristique de A.
À la limite, A et Δ ont donc le même polynôme caractéristique.

5.3.3

A et Δ ont donc les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités. Donc Δ est une des diagonalisées de A, cqfd.

5.4

5.4.1

$\|D_k\| \leq \|A_k\| + \|B_k\| \to \|A\|$ puisque $B_k \to 0$ et $\|A_k\| = \|A\|$.
Donc la suite D_k est bornée. De plus, en notant $a = a_{p,p}^{(k)}, b = a_{p,q}^{(k)}, c = a_{q,q}^{(k)}, \theta = \theta_k$, on a

$$a_{p,p}^{(k+1)} = a\cos^2\theta - 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\theta - b\sin 2\theta \ , \quad a_{q,q}^{(k+1)} = \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2}\cos 2\theta - b\sin 2\theta$$

Comme seuls deux termes diagonaux changent, compte tenu de ce que $\tan 2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{2b}{c-a}$ il vient

$$\|D_k - D_{k+1}\|^2 = (a_{p,p}^{(k+1)} - a)^2 + (a_{q,q}^{(k+1)} - c)^2 = \Big(\frac{a-c}{2}(1-\cos 2\theta) + b\sin 2\theta\Big)^2 + \Big(\frac{a-c}{2}(1-\cos 2\theta) - b\sin 2\theta\Big)^2$$
$$= \frac{(a-c)^2}{2}(1-\cos 2\theta)^2 + 2b^2\sin^2 2\theta = 2b^2\cos^2 2\theta\Big(\frac{(1-\cos 2\theta)^2}{\sin^2 2h} + 1\Big) = 2b^2\cos^2 2\theta\frac{2-2\cos 2\theta}{\sin^2 2h} = 2b^2\frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta} = b^2(4 - \frac{2}{\cos^2\theta})$$

et tout ceci est majoré par $4b^2 \leq 2\varepsilon_k^2 \to 0$.

5.4.2

Les trois hypothèses de la partie IV sont vérifiées, donc la suite (D_k) converge.
Il en résulte que $A_k = D_k$ (converge) $+B_k$ (tend vers 0) converge vers la même limite, qui est une des diagonalisées de A.

6 Exemple pour $n = 3$

Le gros coefficient est le 12 ($p = 2, q = 3$). On a sans calculs puisque la cotangente fut déjà rencontrée en II.E.

$$\mathrm{cotan}\, 2\theta_0 = -\frac{7}{24} \qquad \cos\theta_0 = \frac{4}{5} \qquad \sin\theta_0 = -\frac{3}{5}$$

Ce qui donne ensuite

$$A_1 = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{4} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Ce sont, évidemment, les valeurs propres de A.
Notons qu'en gardant trace des matrices de changement de base $\Omega_k, k = 0, 1$, on peut même trouver la matrice de changement de base finale !