

Proposé par Mrs :
HAMANI Ahmed + NAJMEDDINE Said

I-Produit de convolution

I-A Généralités

I-A-1) :

a) • $\forall x, t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)|\|g\|_\infty$, or f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par comparaison $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui assure la définition de $f * g$ dans $\mathbb{R}$.

• L'inégalité précédente entraine que $\forall x \in \mathbb{R}, |(f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$, donc $\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.

b) • On signale que si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \|g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|dt$.

On a $\forall x, t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(x-t)|^2)$, donc par comparaison $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

• De l'inégalité précédente on aura $\forall x \in \mathbb{R}, |(f * g)(x)| \leq \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$ et par suite

$$\|f * g\|_\infty \leq \frac{1}{2}(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2).$$

I-A-2) $\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$, et avec le changement $u = x - t$ on obtient

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)du = (g * f)(x).$$

I-A-3) f et g sont à support compact, donc $\exists A, B \geq 0$ tels que $f = 0$ (respectivement : $g = 0$) en dehors de $[-A, A]$ (respectivement : $[-B, B]$), alors $\forall |x| > A + B, |t| \leq A, |x-t| > |x| - |t| > A + B - A = B$, donc $g(x-t) = 0$, et par suite $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-A}^A f(t)g(x-t)dt = 0$, ceci assure que $f * g$ est à support compact.

I-B :

I-B-1) • $\implies$ Supposons que h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - y| \leq \eta$, on a $|h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$, alors

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall |\alpha| \leq \eta, |(x - \alpha) - x| = |\alpha| \leq \eta$, donc $|(T_\alpha(h) - h)(x)| = |h(x - \alpha) - h(x)| \leq \varepsilon$, ce qui entraine que $\forall |\alpha| \leq \eta, \|T_\alpha(h) - h\|_\infty \leq \varepsilon$, donc $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

• $\Leftarrow$ Supposons $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$ et soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists \eta > 0$ tel que

$\forall |\alpha| \leq \eta, \forall x \in \mathbb{R}, |h(x - \alpha) - h(x)| \leq \varepsilon$, donc $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - y| \leq \eta$, on a $|h(y) - h(x)| = |h(x - (x - y)) - h(x)| \leq \varepsilon$, ce qui assure l'uniforme continuité de h sur $\mathbb{R}$.

I-B-2) Soient $\alpha, x \in \mathbb{R}$, on a $T_\alpha(f * g)(x) = (f * g)(x - \alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - \alpha - t)dt$ et par le changement de variable

$$u = t + \alpha, \text{ on obtient } T_\alpha(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u - \alpha)g(x - u)du = \int_{\mathbb{R}} T_\alpha(f)(u)g(x - u)du = ((T_\alpha(f)) * g)(x),$$

donc $T_\alpha(f * g) = (T_\alpha(f)) * g$.

I-B-3) $\forall x \in \mathbb{R}, |(T_\alpha(f * g) - (f * g))(x)| = |((T_\alpha(f)) * g)(x) - (f * g)(x)| = |((T_\alpha(f) - f) * g)(x)| =$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} ((T_\alpha(f) - f)(t)g(x - t))dt \right| \text{ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura}$$

$$|(T_\alpha(f * g) - (f * g))(x)| \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \|g\|_2 \text{ et le passage au sup, entraine que}$$

$$\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \|g\|_2.$$

I-B-4) D'après l'inégalité précédente, il suffit de montrer que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0$.

f étant continue et à support compact, donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après **I-B-1**, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f) - f\|_\infty = 0$, si on suppose que f est nulle en dehors de $[-A, A]$, alors

$$\forall |\alpha| \leq A, \|T_\alpha(f) - f\|_2^2 = \int_{-2A}^{2A} |(T_\alpha(f) - f)(t)|^2 dt \leq 4A \|T_\alpha(f) - f\|_\infty^2, \text{ donc } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0.$$

I-B-5) • On introduit la suite de fonctions continues à supports compacts définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} 1 & \text{sur } [-n + \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2}] \\ \text{affine par morceaux} & \text{sur } [-n, -n + \frac{1}{2}] \cup [n - \frac{1}{2}, n] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

• Soit $f_n = f u_n$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, \|T_\alpha(f - f_n)\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 \leq \int_{-\infty}^{-n+\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt + \int_{n-\frac{1}{2}}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \rightarrow 0$

lorsque n tend vers $+\infty$ (car $f \in L^2(\mathbb{R})$).

• Soit $\varepsilon > 0$, alors :

- $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_\alpha(f - f_N)\|_2^2 = \|f - f_N\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{9}$.

- f_N étant continue à support compact, donc d'après la question précédente $\exists \eta > 0$ tel que $\forall |\alpha| < \eta$, $\|T_\alpha(f_N) - f_N\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

• En conclusion on a $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall |\alpha| < \eta, \|T_\alpha(f) - f\|_2 = \|T_\alpha(f - f_N) + T_\alpha(f_N) - f_N + f_N - f\|_2 \leq \|T_\alpha(f - f_N)\|_2 + \|T_\alpha(f_N) - f_N\|_2 + \|f_N - f\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, d'où $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0$ et l'inégalité de la question **I-B-3** entraîne que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f) - f\|_\infty = 0$ et la conclusion est assurée par la question **I-B-1**.

I-C :

I-C-1) :

a) • $(x, t) \mapsto f(t)g(x - t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, |f(t)g(x - t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$, φ étant continue positive intégrable.

• Ainsi les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale sont vérifiées, ce qui assure la continuité de $f * g$.

b) • $\forall x, \alpha \in \mathbb{R}, |(T_\alpha(f * g))(x) - (f * g)(x)| = |\int_{\mathbb{R}} (T_\alpha(g) - g)(t)f(x - t)dt| \leq \|T_\alpha(g) - g\|_\infty \|f\|_1$, donc $\|T_\alpha(f * g) - (f * g)\|_\infty \leq \|T_\alpha(g) - g\|_\infty \|f\|_1$, or g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après la question **I-B-1**, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(g) - g\|_\infty = 0$, et par suite $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f * g) - (f * g)\|_\infty = 0$, ce qui assure l'uniforme continuité de $f * g$ sur $\mathbb{R}$.

I-C-2) • $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(t)g(x - t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(t)g(x - t)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x, t \in \mathbb{R}, \forall p \in [[0, k]], |\frac{\partial^p}{\partial x^p}(f(t)g(x - t))| = |f(t)g^{(p)}(x - t)| \leq \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)| = \varphi_p(t)$, les φ_p sont continues positives et intégrables.

Donc d'après le théorème de Leibniz, $f * g$ est de classe C^k et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in [[0, k]], (f * g)^{(p)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g^{(p)}(x - t)dt = (f * g^{(p)})(x).$$

I-C-3) :

a) Il s'agit du théorème de Dirichlet :

Si g est une fonction continue, 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux, alors g coïncide avec sa série de Fourier.

b) • g est 2π -périodique, donc aussi pour $f * g$.

• g est continue 2π -périodique, donc g est bornée sur $\mathbb{R}$, donc d'après **I-C-1**, $f * g$ est continue.

• g' est 2π -périodique continue par morceaux, donc bornée sur $\mathbb{R}$, donc d'après **I-C-2**, $f * g$ est de classe C^1 par morceaux.

• En définitive, $f * g$ vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet, $f * g$ coïncide avec sa série de Fourier.

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, c_n(f * g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f * g)(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t)dt \right) e^{-inx}dx, \text{ or}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} |f(t)g(x - t)e^{-inx}|dxdt \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{2\pi} |g(x - t)|dx \right) |f(t)|dt, \text{ et le changement } u = x - t \text{ avec } g$$

$$2\pi\text{-périodique, on obtient } \int_0^{2\pi} |g(x - t)|dx = \int_0^{2\pi} |g(u)|du, \text{ donc}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{2\pi} |g(x - t)|dx \right) |f(t)|dt = \left(\int_0^{2\pi} |g(u)|du \right) \|f\|_1 < +\infty, \text{ donc d'après le théorème de Fubini, on}$$

$$\text{peut permuter les deux intégrales, ce qui donne } c_n(f * g) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x - t)e^{-in(x-t)}dx \right) f(t)e^{-int}dt,$$

et la 2π -périodicité de $x \mapsto g(x-t)e^{-in(x-t)}$ entraîne que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-in(x-t)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u)e^{-inu} du = c_n(g), \text{ et par suite } c_n(f*g) = c_n(g) \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-int} dt.$$

I-D :

I-D-1) Soient $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

- La continuité de f en x entraîne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall |t| \leq \alpha, |f(x-t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \delta_n(t) dt = 0$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \int_{|t| \geq \alpha} \delta_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$.
- Ainsi $\forall n \geq N, |(f * \delta_n)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x)) \delta_n(t) dt \right| \leq \int_{|t| \geq \alpha} |f(x-t) - f(x)| \delta_n(t) dt + \int_{|t| \leq \alpha} |f(x-t) - f(x)| \delta_n(t) dt \leq 2\|f\|_\infty \int_{|t| \geq \alpha} \delta_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{|t| \leq \alpha} \delta_n(t) dt \leq 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, d'où la convergence simple de $f * \delta_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

I-D-2) Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, |(f * \delta_n)(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (T_t(f)(x) - f(x)) \delta_n(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \|T_t(f) - f\|_\infty \delta_n(t) dt$, or f est à support compact, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et d'après **I-B-1** $\lim_{t \rightarrow 0} \|T_t(f) - f\|_\infty = 0$.

- Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall |t| \leq \alpha, \|T_t(f) - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$, de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \delta_n(t) dt = 0$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \int_{|t| \geq \alpha} \delta_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$, et par suite $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ $|(f * \delta_n)(x) - f(x)| \leq \int_{|t| \geq \alpha} \|T_t(f) - f\|_\infty \delta_n(t) dt + \int_{|t| \leq \alpha} \|T_t(f) - f\|_\infty \delta_n(t) dt \leq 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ceci $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où la convergence uniforme de $f * \delta_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

I-D-3) :

- a) • Il est clair que $h_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} h_n = \int_{-1}^1 h_n = 1$.
- Soit $\varepsilon > 0$, alors :
 -si $\varepsilon \geq 1$, $\int_{|t| > \varepsilon} h_n = 0$.
 -si $\varepsilon \in]0, 1[$, par parité de h_n , on obtient $\int_{|t| \geq \varepsilon} h_n = \frac{2}{\lambda_n} \int_{\varepsilon}^1 (1-t^2)^n dt \leq \frac{2}{\lambda_n} (1-\varepsilon^2)^n$, or $\lambda_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq 2 \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{2}{n+1}$, ce qui entraîne que $\int_{|t| \geq \varepsilon} h_n \leq (n+1)(1-\varepsilon^2)^n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- b) • D'après la question **I-A-3**, $f * h_n$ est nulle en dehors de $[-A, A]$ où $A = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
- $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], (f * h_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) h_n(x-t) dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) (1-(x-t)^2)^n dt$, or $\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], x \mapsto (1-(x-t)^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(t) x^k$, donc $(f * h_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{\lambda_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) a_k(t) dt \right) x^k$, donc $f * h_n$ est polynômiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
- c) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $[c, d]$ contenant strictement $[a, b]$.
 Prolongeons f en une fonction continue, nulle en dehors de $[c, d]$ et soit $\varphi : t \mapsto (d-c)t + \frac{c+d}{2}$, alors $g = f \circ \varphi$ est continue, nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et d'après **I-D-2**, g est limite uniforme d'une suite $f * h_n$ qui est d'après **I-D-3-b**, polynômiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc aussi pour f sur $[a, b]$.

I-D-4) Supposons que la réponse est affirmative, alors en particulier, on aura

$\forall n \in \mathbb{N}, h_n = h_n * g$, donc d'après **I-D-1**, $(h_n)_n$ converge simplement vers g , et par suite $h_n(0) = \frac{1}{\lambda_n}$ tend vers $g(0) \in \mathbb{R}$ (g est bornée), or le changement $t = \sin(\theta)$, montre que λ_n est une intégrale de Wallis $\lambda_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta \sim 2 \sqrt{\frac{\pi}{2n+1}}$, donc $h_n(0)$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit $g(0)$ est fini.

II-Transformée de Fourier

II-A $\forall x \in \mathbb{R}, |\widehat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_1$, donc $\widehat{f}$ est bornée et $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

II-B :

II-B-1) :

- a) • $\forall x, t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_{\infty}|f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$, donc $\forall x \in \mathbb{R} t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
 • $\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt \right) dx$, or $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)| |g(x-t)| dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| dx \right) dt$,
 et $\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| dx = \int_{\mathbb{R}} |g(u)| du$, donc $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)| |g(x-t)| dx \right) dt = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$,
 donc le théorème de Fubini nous permet de permuter les deux intégrales, ce qui donne avec
 $\int_{\mathbb{R}} g(x-t) dx = \int_{\mathbb{R}} g(u) du$, $\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-t) dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) du \right) dt =$
 $\left(\int_{\mathbb{R}} f(t) dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(u) du \right)$.
- b) $\forall t, u \in \mathbb{R}$, posons $f_1(t) = f(t)e^{-iut}$, $g_1(t) = g(t)e^{-iut}$, alors f_1 et f_2 sont intégrables et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $(f_1 * g_1)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-t)g_1(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)e^{-ixu} dt = (f * g)(x)e^{-ixu}$.

En appliquant l'égalité précédente à f_1 et g_1 , on aura : $\forall u \in \mathbb{R}, \widehat{f * g}(u) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t)e^{-iut} dt =$
 $\int_{\mathbb{R}} (f_1 * g_1)(t) dt = \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(t) dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(t) dt \right) = \widehat{f}(u) \times \widehat{g}(u)$, donc $\widehat{f * g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$.

II-B-2) • Soit f la fonction affine par morceaux, paire, nulle sur $[0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* f$ nulle en dehors des segments $[n, n + \frac{1}{n^3}]$ et prend la valeur n au milieu.

- Sur chaque intervalle $[n, n + 1]$, on a $f(t) = \begin{cases} 2n^4(t-n) & \text{si } t \in [n, n + \frac{1}{2n^3}] \\ -2n^4(t-n - \frac{1}{n^3}) & \text{si } t \in [n + \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{n^3}] \\ 0 & \text{si } t \in [n + \frac{1}{n^3}, n + 1] \end{cases}$

Donc $f^2(t) = \begin{cases} 4n^8(t-n)^2 & \text{si } t \in [n, n + \frac{1}{2n^3}] \\ 4n^8(t-n - \frac{1}{n^3})^2 & \text{si } t \in [n + \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{n^3}] \\ 0 & \text{si } t \in [n + \frac{1}{n^3}, n + 1] \end{cases}$

- $\int_{\mathbb{R}} f = 2 \int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, donc $f \in L^1(\mathbb{R})$.
 • $\int_{\mathbb{R}} f^2 = 2 \int_0^{+\infty} f^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3n}$, donc $f \notin L^2(\mathbb{R})$.
 • On a donc $f \in L^1(\mathbb{R})$, mais $(f * f)(0) = \int_{\mathbb{R}} f^2 = +\infty$.

II-C :

- II-C-1) •** Si $x \neq 0$, $\widehat{k_n}(x) = \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) e^{-ixt} dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) (e^{-ixt} + e^{ixt}) dt = 2 \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) \cos(xt) dt$
 $= 2 \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right) \frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^n + \frac{2}{nx} \int_0^n \sin(xt) dt = \frac{2}{nx} \left[-\frac{\cos(xt)}{x} \right]_0^n = \frac{2}{nx^2} (1 - \cos(nx)) = \frac{4}{nx^2} \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$
 $= n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)$.
 • Si $x = 0$, $\widehat{k_n}(x) = 2 \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right) dt = n$.
 • En conclusion $\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{k_n}(x) = n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)$.

II-C-2) La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et au voisinage de l'infini $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{x^2}$, donc par comparaison φ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$.

II-C-3) • C'est clair que $\forall n \in \mathbb{N}, K_n \geq 0$ et le changement $u = \frac{nx}{2}$ conduit à $\int_{\mathbb{R}} \widehat{k_n} = 2 \int_{\mathbb{R}} \varphi = 2\pi$, donc
 $\int_{\mathbb{R}} K_n = 1$.

- Soit $\varepsilon > 0$, $\widehat{k_n}$ est paire, donc :

$$\int_{-\varepsilon}^{-\infty} K_n = \int_{\varepsilon}^{+\infty} K_n = \frac{n}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi\left(\frac{nx}{2}\right) dx \leq \frac{n}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{4}{n^2 x^2} dx = \frac{2}{\pi n \varepsilon} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$
- En conclusion, $(K_n)_n$ est une approximation de l'unité.

II-D :

II-D-1) $\forall t \in \mathbb{R}, (f * K_n)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) K_n(t-u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x) e^{-i(t-u)x} dx \right) du$, or

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u) e^{-i(t-u)x}| du \right) |k_n(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)| du \right) |k_n(x)| dx = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)| du \right) \left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x) dx \right)$$

 $= \|f\|_1 \widehat{k_n}(0) = n \|f\|_1 < +\infty$,
 ce qui permet par le théorème de Fubini de permuter les deux intégrales, donc

$$(f * K_n)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{iux} du \right) k_n(x) e^{-itx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} k_n(x) \widehat{f}(-x) e^{-itx} dx = I_n(t).$$

II-D-2) • Soient $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, (f * K_n)(t) - f(t) = \int_{\mathbb{R}} (f(t-x) - f(t)) K_n(x) dx =$
 $= \frac{n}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (f(t-x) - f(t)) \varphi\left(\frac{nx}{2}\right) dx$ et le changement de variables $u = \frac{nx}{2}$ donne

$$(f * K_n)(t) - f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(f\left(t - \frac{2u}{n}\right) - f(t) \right) \varphi(u) du.$$

- La continuité de f entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(t - \frac{2u}{n}\right) - f(t) = 0$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que
 $\forall n \geq N, |f\left(t - \frac{2u}{n}\right) - f(t)| \leq \varepsilon$, donc $|(f * K_n)(t) - f(t)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) du = \varepsilon$, ce qui entraîne que
 $\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} (f * K_n)(t) = f(t).$

- - $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, t \mapsto k_n(x) \widehat{f}(-x) e^{-itx}$ est intégrable .
- $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ la suite $n \mapsto k_n(x) \widehat{f}(-x) e^{-itx}$ converge vers $\widehat{f}(-x) e^{-itx}$.
- $\forall x, t \in \mathbb{R}, |k_n(x) \widehat{f}(-x) e^{-itx}| \leq |\widehat{f}(-x)| \in L_1(\mathbb{R})$.

Donc d'après le théorème de la convergence dominée, $I_n(t)$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-x) e^{-itx} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{itx} dx$.

- L'unicité de la limite entraîne que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{itx} dx$.

III-Convolution et dimension finie

III-A : On note ici que $\varphi_g(f) = (f * g)(0)$.

III-A-1) • $\Leftarrow$ Supposons que $(\varphi_{g_1}, \dots, \varphi_{g_p})$ est libre et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k g_k = 0$, alors

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \left(f * \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k g_k \right) \right)(0) = \sum_{k=1}^p \lambda_k (f * g_k)(0) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_{g_k}(f) = 0, \text{ donc } \sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_{g_k} = 0 \text{ et par suite}$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

• $\Rightarrow$ Supposons que $(g_1, \dots, g_p)$ est libre et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_{g_k} = 0$, c'est à dire

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k g_k \right)(-t) dt = 0, \text{ en particulier pour } f : t \mapsto \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k g_k \right)(-t), \text{ on obtient}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^p \lambda_k g_k \right\|_2^2 = 0, \text{ ce qui donne } \sum_{k=1}^p \lambda_k g_k = 0 \text{ et la liberté de la famille } (g_1, \dots, g_n) \text{ entraîne que :}$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

III-A-2) • Supposons que $rg((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = p$, quitte à réordonner les indices on peut supposer que $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, donc l'application

$\psi : E \longrightarrow R^p$ qui à x fait correspondre $(f_1(x), \dots, f_p(x))$ est surjective, et par suite

$$Ker(\psi) = \bigcap_{k=1}^p Ker(f_k) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Ker(f_k) = K \text{ est de codimension } dim(Im(\psi)) = p = rg((f_n)_n).$$

- Supposons que le rang de $(f_n)_n$ est infini, alors $\forall p \in \mathbb{N}$ on peut extraire une famille libre à p éléments de $(f_n)_n$, quitte à réordonner les éléments de cette famille, on peut la prendre $(f_1, \dots, f_p)$, or

$K = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(f_k) \subset \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}(f_k)$, donc $\text{codim}(K) \geq \text{codim}(\bigcap_{k=1}^p \text{Ker}(f_k)) = \text{rg}(f_1, \dots, f_p) = p$, ceci pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc la codimension de K est infinie.

III-A-3) $f \in N_g$ si, et seulement si $f * g = 0$ si, et seulement si $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (f * g)(-\alpha) = 0$ si, et seulement si $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (f * T_\alpha(g))(0) = 0$ si, et seulement si $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \varphi_{T_\alpha(g)}(f) = 0$ si, et seulement si $f \in \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Ker}(\varphi_{T_\alpha(g)})$

Donc $N_g = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Ker}(\varphi_{T_\alpha(g)})$, et d'après la question précédente, sa codimension est égale au rang de $(\varphi_{T_\alpha(g)})_{\alpha \in \mathbb{R}}$ qui d'après la question **III-A-1** égale à $\text{rg}((T_\alpha(g))_{\alpha \in \mathbb{R}}) = \dim(V_g)$.

III-A-4) :

a) $V_g = \text{Vect}\{T_\alpha(g)/\alpha \in \mathbb{R}\}$. $\forall \alpha, t \in \mathbb{R}, T_\alpha(g)(t) = g(t - \alpha) = e^{i\beta(t-\alpha)} = e^{-i\beta\alpha}g(t) = e^{-i\beta\alpha}T_0(g)(t)$, donc $\dim(V_g) = 1$.

b) • Si $n = 0$, la fonction nulle répond à la question.

• Si $n \neq 0$, soit la fonction $g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}kt}$, alors $\forall \alpha, t \in \mathbb{R}, g(t - \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}k(t-\alpha)} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\frac{2\pi}{n}k\alpha} e^{i\frac{2\pi}{n}kt}$,

donc $V_g \subset \text{Vect}\left(1, e^{i\frac{2\pi}{n}t}, \dots, e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}t}\right)$.

• La famille $(T_0(g), \dots, T_{n-1}(g))$ est libre, en effet soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$, tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k T_k(g) = 0$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \left(\sum_{p=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}p(t-k)} \right) = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e^{-i\frac{2\pi}{n}pk} \right) e^{i\frac{2\pi}{n}pt} = 0, \text{ or la famille } \left(1, e^{i\frac{2\pi}{n}t}, \dots, e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}t}\right)$$

est libre, donc $\forall p \in [[0, n-1]]$, $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e^{-i\frac{2\pi}{n}pk} = 0$, on a obtenu un système de Cramer de discriminant

Vandermonde $(1, e^{-i\frac{2\pi}{n}}, \dots, e^{-i\frac{2\pi(n-1)}{n}}) \neq 0$, donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} = 0$, d'où la liberté de $(T_0(g), \dots, T_{n-1}(g))$.

• En définitive $V_g = \text{Vect}\left(1, e^{i\frac{2\pi}{n}t}, \dots, e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}t}\right)$.

III-B :

III-B-1) Supposons que $\dim(V_g) = p$ et soit $(T_{\alpha_1}(g), \dots, T_{\alpha_p}(g))$ une base de V_g .

• g vérifie l'hypothèse A , donc d'après la question **I-C-2**, $f * g$ est de classe C^∞ avec $\forall k \in \mathbb{N} (f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$, ce qui entraîne l'inclusion $N_g \subset N_{g^{(k)}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\bigcap_{j=1}^p (\text{Ker}(\varphi_{T_{\alpha_j}(g)})) \subset \text{Ker}(\varphi_{T_0(g^{(k)})})$ pour tous $k \in \mathbb{N}$, et puisque $T_0(g^{(k)}) = g^{(k)}$, on aura $\{g, g', \dots, g^{(p+1)}\} \subset V_g$, donc la famille $(g, g', \dots, g^{(p+1)})$ est liée, ce qui signifie que g vérifie une équation d'ordre $p+1$ à coefficients constants.

III-B-2) $\Rightarrow$ Supposons que N_g est de codimension finie, alors d'après la question précédente g est solution d'une équation différentielle à coefficients constants.

$\Leftarrow$ Supposons que g vérifie une équation différentielle d'ordre $p+1$ à coefficients constants

$(E) : g^{(p+1)} = \sum_{k=1}^p a_k g^{(k)}$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (T_\alpha(g))^{(p+1)} = \sum_{k=1}^p a_k (T_\alpha(g))^{(k)}$, c'est à dire $\forall \alpha \in \mathbb{R}, T_\alpha(g)$ est solution de (E) , donc $\text{Vect}(T_\alpha(g)) \subset \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de solution de (E) qui est de dimension finie, donc $\dim(V_g)$ est finie.

III-C :

III-C-1) $\dim(V_g) = n$, donc $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $(T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_n})$ est une base de V_g , donc

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists (m_1(\alpha), \dots, m_n(\alpha)) \in \mathbb{R}^n$ tel que $T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g)$, et l'unicité montre bien qu'on définit des fonctions $m_1, \dots, m_n$ d'une variable réelle.

III-C-2) :

a) • Soit $K = \bigcap_{a \in \mathbb{R}} (\text{Ker}(e_a))$, alors $\text{codim}(K) = \text{rg}\{e_a/a \in \mathbb{R}\}$ dans F^* .

• Soit $f \in K$, alors $\forall a \in \mathbb{R}, e_a(f) = f(a) = 0$, donc $f = 0$ et par suite $\text{codim}(K) = \dim(F) = p$, et par suite $\text{rg}\{e_a/a \in \mathbb{R}\} = p = \dim(F^*)$, d'où l'existence de $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que $(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$ est une base de F^* .

b) Soit $(g_1, \dots, g_p)$ la base de F préduale de $(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$, alors pour tout $j \in [[1, p]]$,

$$f_j = \sum_{i=1}^p e_{a_i}(f_j) g_i = \sum_{i=1}^p f_j(a_i) g_i, \text{ donc la matrice de } (f_1, \dots, f_p) \text{ dans la base } (g_1, \dots, g_p) \text{ est } M = (f_j(a_i))_{1 \leq i, j \leq p}, \text{ donc :}$$

$(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F si, et seulement si $\text{Det}(M) = \text{Det}({}^t M) = \text{Det}((f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq p}) \neq 0$.

III-C-3) • Le sous espace de $C(\mathbb{R})$, $F = V_g$ est de dimension finie égale à n , soit $(T_{\alpha_1}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ une base de F , alors d'après la question précédente, $\Delta = \text{Det}((T_{\alpha_i}(g)(a_j))) \neq 0$.

• En appliquant l'égalité de **III-C-1** à a_j pour tout $j = 1, \dots, n$, on obtient $T_\alpha(g)(a_j) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g)(a_j)$,

ce qui s'écrit : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall j \in [[1, n]]$, $g(a_j - \alpha) = \sum_{i=1}^n g(a_j - \alpha_i) m_i(\alpha)$, on obtient ainsi un système de Cramer

de discriminant $\Delta \neq 0$, donc $\forall j \in [[1, n]]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $m_j(\alpha) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \Delta_{ij} g(a_i - \alpha)$ où Δ_{ij} est obtenu de Δ en

remplaçant la $j^{\text{ème}}$ colonne par le second membre du système.

• En définitive m_j est de classe C^k comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^k , à savoir les fonctions

$$g_i : \alpha \mapsto g(a_i - \alpha).$$

III-C-4) • Soit $(T_{\alpha_1}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g , alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists m_1(\alpha), \dots, m_n(\alpha) \in \mathbb{R}$ tels que $T_\alpha(g) =$

$$\sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g), \text{ donc } \forall r \in \mathbb{N}, T_\alpha(h_r * g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g), \text{ ce qui entraîne que } (T_{\alpha_1}(h_r * g), \dots, T_{\alpha_n}(h_r * g))$$

est une famille génératrice de $V_{h_r * g}$, donc $\dim(V_{h_r * g}) \leq n < +\infty$.

III-C-5) • Soit $(T_{\alpha_1}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g , alors $\Delta = \text{Det}((T_{\alpha_i}(g)(a_j))) \neq 0$.

• Considérons la suite $\Delta_r = \text{Det}((T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j)))$, la continuité de la fonction Det entraîne que Δ_r converge vers $\Delta \neq 0$, donc à partir d'un certain rang, Δ_r est non nul, ce qui entraîne que $(T_{\alpha_1}(h_r * g), \dots, T_{\alpha_n}(h_r * g))$ est libre, donc $\dim(V_{h_r * g}) \geq n = \dim(V_n)$, d'où l'égalité $\dim(V_{h_r * g}) = \dim(V_n)$.

III-C-6) • Soit r assez grand, et $(T_{\alpha_1}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g , donc d'après la question précédente $(T_{\alpha_1}(h_r * g), \dots, T_{\alpha_n}(h_r * g))$ est une base de $V_{h_r * g}$ et on a l'égalité

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall j \in [[1, n]] \quad T_\alpha(h_r * g)(a_j) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j), \text{ or } \Delta = |(T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j))_{i,j}| \neq 0, \text{ donc}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall r \in [[1, n]], m_k(\alpha) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \Delta_{ik}(h_r * g)(a_i - \alpha).$$

• -1 et 1 sont des zéros de h_r d'ordre r , donc par le théorème de prolongement, h_r est de classe $C^{(r-1)}$, et par suite $x \mapsto (h_r * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} h_r(x-t)g(t)dt = \int_{x-1}^{x+1} h_r(x-t)g(t)dt$ est de classe $C^{(r-1)}$.

• On en déduit que les m_i sont de classe $C^{(r-1)}$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe $C^{(r-1)}$ et ceci pour tout r assez grand, donc les m_i sont de classe C^∞ .

III-C-7) Montrons que l'ensemble des fonctions $g \in C_b(\mathbb{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$ est celui des fonctions vérifiant la condition A.

• $\Rightarrow$: Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$ tel que $\text{codim}(N_g) = n < +\infty$ et soit $(T_{\alpha_1}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g , donc

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, T_{-\alpha}(g)(0) = \sum_{i=1}^n m_i(-\alpha) T_{\alpha_i}(g)(0), \text{ c'est à dire } g(\alpha) = \sum_{i=1}^n m_i(-\alpha) g(-\alpha_i), \text{ or les } m_i \text{ sont de classe}$$

C^∞ , donc g est C^∞ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^∞ .

• Montrons que les $m_i^{(k)}$ sont bornées, pour cela soit r assez grand tel que $\dim(V_{h_r * g}) = \dim(V_g) = n$ et $(T_{\alpha_1}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g , alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g), \text{ donc } T_\alpha(h_r * g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g), \text{ ce qui donne en dérivant par}$$

rapport à α

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad (T_\alpha(h_r * g))^{(k)}(0) = (-1)^k T_\alpha(h_r * g^{(k)})(0) = \sum_{i=1}^n m_i^{(k)}(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g)(0), \text{ or } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad |(T_\alpha(h_r * g))^{(k)}(0)| =$$

$$|(h_r * g^{(k)})(-\alpha)| = \left| \int_{-1}^1 h_r(t+\alpha) g^{(k)}(t) dt \right| \leq \sup_{t \in [-1,1]} |g^{(k)}(t)|, \text{ donc les } (T_\alpha(h_r * g))^{(k)}(0) \text{ sont bornées, donc}$$

aussi pour les $m_i^{(k)}$, c'est à dire les m_i vérifient l'hypothèse A, ce qui entraîne que g l'est aussi comme combinaison linéaire des m_i .

• $\Leftarrow$ Réciproquement si g vérifie l'hypothèse A, alors d'après **III-B-2**, N_g est de codimension finie.