

CORRIGE

Première partie

1. Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, on a $|e^{-|n|t}e^{inx}| = e^{-|n|t} = (e^{-t})^{|n|}$. Par conséquent,

- si $t \leq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|e^{-|n|t}e^{inx}| \geq 1 \Rightarrow e^{-|n|t}e^{inx} \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série $\sum_{n \geq 0} e^{-|n|t}e^{inx}$ diverge grossièrement ce qui entraîne la divergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|t}e^{inx}$
- si $t > 0$ alors $e^{-t} \in]0, 1[$ donc les séries

$$\sum_{n \geq 0} (e^{-t})^{|n|} = \sum_{n \geq 0} (e^{-t})^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \leq -1} (e^{-t})^{|n|} = \sum_{n \leq -1} (e^{-t})^{-n} = \sum_{n \geq 1} (e^{-t})^n$$

sont convergentes. Par conséquent, les séries $\sum_{n \geq 0} e^{-|n|t}e^{inx}$ et $\sum_{n \leq -1} e^{-|n|t}e^{inx}$ convergent absolument donc elles sont convergentes ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|t}e^{inx}$

2. Pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{P(x, t)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|t}e^{-inx} \stackrel{m=-n}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-|-m|t}e^{imx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-|m|t}e^{imx} = P(x, t)$$

donc $P(x, t)$ est bien un nombre réel. Fixons $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} P(x, t) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|n|t}e^{inx} \right) + \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-|n|t}e^{inx} \right) \right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|n|t}e^{inx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-|n|t}e^{inx} dx \end{aligned}$$

Puisque

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |e^{-|n|t}e^{inx}| = e^{-|n|t} = \begin{cases} (e^{-t})^n & \text{si } n \geq 0 \\ (e^{-t})^{-n} & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

les séries $\sum_{n \geq 0} e^{-|n|t}e^{inx}$ et $\sum_{n \leq -1} e^{-|n|t}e^{inx}$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-\pi, \pi]$ et comme pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction $x \mapsto e^{-|n|t}e^{inx}$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, on peut permuter les symboles d'intégration et de sommation, ce qui nous donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(x, t) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-|n|t} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx + \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-|n|t} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx$$

Etant donné que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$ si $n = 0$ et

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{in} = \frac{2 \sin(n\pi)}{n} = 0 \text{ si } n \neq 0,$$

on en déduit que $\int_{-\pi}^{\pi} P(x, t) dx = e^{-|0|t} 2\pi = 2\pi$

3. (a) Etablissons auparavant un résultat que nous allons utiliser à plusieurs reprises. Si $a > 0$ et $b \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^b e^{-|n|a}$ est convergente. En effet, d'après les croissances comparées, on a $|n|^b e^{-|n|a} \underset{|n| \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (d'après

les croissances comparées) et les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \leq -1} \frac{1}{n^2}$ sont convergentes (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^b e^{-|n|a}$ converge.

En particulier, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$ converge absolument quel que soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ (donc aussi les séries $\sum_{n \geq 0} (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$ et $\sum_{n \leq -1} (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$) et $(t, x) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ puisque

$$\left| (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{inx} \right| = |n|^{p+q} e^{-|n|t}.$$

Etablissons le résultat principal par récurrence sur $p + q$ en posant $(\mathcal{H}_n) : "P \text{ est de classe } C^n \text{ sur } \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R} \text{ et pour tout } (p, q) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } p + q = n,$

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q}(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{-inx}$$

Initialisation $n = 0$: Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$,

$$\forall (t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left| e^{-|n|t} e^{inx} \right| = e^{-|n|t} \leq e^{-|n|a}$$

La suite $(e^{-|n|a})_{n \in \mathbb{Z}}$ est indépendante de (t, x) , les séries $\sum_{n \geq 0} e^{-|n|a}$ et $\sum_{n \leq -1} e^{-|n|a}$ sont convergentes donc on a établi la convergence normale sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ des séries $\sum_{n \geq 0} e^{-|n|t} e^{inx}$ et $\sum_{n \leq -1} e^{-|n|t} e^{inx}$. En outre, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $(t, x) \mapsto e^{-|n|t} e^{inx}$ sont continues sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ donc les fonctions

$$(t, x) \mapsto \sum_{n \geq 0} (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{inx} \quad \text{et} \quad (t, x) \mapsto \sum_{n \leq -1} (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$$

sont continues sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction P est continue sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ quel que soit $a > 0$ donc elle est continue sur $\bigcup_{a > 0} [a, +\infty[\times \mathbb{R} = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{H}_{n+1})$. La fonction P est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p + q = n$, on a

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q}(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$$

Montrons que $\frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ et que $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q} \right) (x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^{p+1} (in)^q e^{-|n|t} e^{inx} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q} \right) (x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^p (in)^{q+1} e^{-|n|t} e^{inx} \end{aligned}$$

ce qui démontrera $(\mathcal{H}_{n+1})$. Fixons $a \in \mathbb{R}_+^\times$.

- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $(t, x) \mapsto |n|^p (-in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$.
- Les séries $\sum_{n \geq 0} |n|^p (-in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$ et $\sum_{n \leq -1} |n|^p (-in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$ sont simplement convergentes sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$.
- Pour tout $(t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left| (-|n|)^{p+1} (in)^q e^{-|n|t} e^{inx} \right| &= |n|^{p+q+1} e^{-|n|t} \leq |n|^{p+q+1} e^{-|n|a} \\ \left| (-|n|)^p (in)^{q+1} e^{-|n|t} e^{inx} \right| &= |n|^{p+q+1} e^{-|n|t} \leq |n|^{p+q+1} e^{-|n|a} \end{aligned}$$

La suite $(|n|^{p+q+1} e^{-|n|a})_{n \in \mathbb{Z}}$ est indépendante de (t, x) , les séries $\sum_{n \geq 0} |n|^{p+q+1} e^{-|n|a}$ et $\sum_{n \leq -1} |n|^{p+q+1} e^{-|n|a}$

sont convergentes donc les séries

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (-|n|)^{p+1} (in)^q e^{-|n|t} e^{inx}, & \quad \sum_{n \leq -1} (-|n|)^{p+1} (in)^q e^{-|n|t} e^{inx}, \\ \sum_{n \geq 0} (-|n|)^p (in)^{q+1} e^{-|n|t} e^{inx}, & \quad \sum_{n \leq -1} (-|n|)^p (in)^{q+1} e^{-|n|t} e^{inx} \end{aligned}$$

convergent normalement sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation des sommes de séries montre que la fonction $\frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q}$ est C^1 respectivement par rapport à t sur $[a, +\infty[$ et x sur $\mathbb{R}$ donc $\frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q}$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ et $\forall (t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q} \right) (x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^{p+1} (in)^q e^{-|n|t} e^{inx} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q} \right) (x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-|n|)^p (in)^{q+1} e^{-|n|t} e^{inx} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\frac{\partial^{p+q} P}{\partial t^p \partial x^q}$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ quel que soit $a > 0$ donc elle est de classe C^1 sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[\times \mathbb{R} = \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ et les formules de dérivation attendues sont vérifiées, ce qui démontre $(\mathcal{H}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) D'après la question précédente, on a $\forall (t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} (x, t) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} (x, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 e^{-|n|t} e^{inx} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^2 e^{-|n|t} e^{inx} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 e^{-|n|t} e^{inx} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} -n^2 e^{-|n|t} e^{inx} = 0 \end{aligned}$$

4. La fonction P_t est C^1 sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique (le lecteur le vérifiera immédiatement) donc elle est développable en série de Fourier et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(P_t) e^{inx}$$

D'autre part, on a établi précédemment l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx}$$

Par unicité des coefficients trigonométriques des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \hat{P}_t(n) = e^{-|n|t}.$$

5. On commence par remarquer que

$$1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t} = 0 \Leftrightarrow (e^{-t} - 1)^2 + 2e^{-t}(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-t} - 1)^2 + 4e^{-t} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

Une somme de termes positifs étant nulle si et seulement tous les termes sont nuls et l'exponentielle ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-t} - 1 = 0 \\ \sin \left(\frac{x}{2} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \frac{x}{2} = 0 \bmod \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \bmod 2\pi \end{cases}$$

6. En se rappelant que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad / \quad |z| < 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = z \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} \underset{p=n-1}{=} z \sum_{p=0}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z},$$

et étant donné que $|e^{-t}e^{\pm ix}| = e^{-t} < 1$ lorsque $t > 0$, on obtient que

$$\begin{aligned} P(t, x) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-|n|t} e^{inx} + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-|n|t} e^{inx} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} e^{-inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} e^{inx} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \cos(nx) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} e^{inx} \right) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t} e^{ix})^n \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-t} e^{-ix}}{1 - e^{-t} e^{-ix}} \right) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-t} e^{-ix} (1 - e^{-t} e^{ix})}{(1 - e^{-t} e^{-ix})(1 - e^{-t} e^{ix})} \right) \\ &= 1 + 2 \times \frac{e^{-t} \cos x - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} \end{aligned}$$

D'après la question **I.5**, $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$, $1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t} \geq 0$ donc le signe de $P(t, x)$ est celui de $1 - e^{-2t}$ qui est strictement positif lorsque $t > 0$.

7. Si $t \rightarrow 0^+$ alors $1 - e^{-2t} \rightarrow 0^+$ et $1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t} \rightarrow 2 - 2 \cos x = 4 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$ donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P_t(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} P(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $a \in]0, \pi[$, si $x \in [a, \pi]$ alors $\sin \left(\frac{x}{2} \right) \geq \sin \left(\frac{a}{2} \right) \geq 0$ (par croissance de $\sin$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$) donc si

$$x \in [-\pi, -a] \cup [a, \pi], \quad \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right| \geq \left| \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right|$$

(par parité de $|\sin|$). En utilisant la question **I.5** et la positivité de P_t , on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in [-\pi, -a] \cup [a, \pi], \quad (e^{-t} - 1)^2 + 4e^{-t} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) &\geq 4e^{-t} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \\ \Rightarrow |P_t(x)| = P_t(x) &= \frac{1 - e^{-2t}}{(e^{-t} - 1)^2 + 4e^{-t} \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \leq \frac{1 - e^{-2t}}{4e^{-t} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right)} \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1 - e^{-2t}}{4e^{-t} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right)}$ est indépendante de x et tend vers 0 lorsque $t \rightarrow 0$ donc la convergence est uniforme sur $[-\pi, -a] \cup [a, \pi]$.

Deuxième partie

8. La fonction f est continue par morceaux et 2π -périodique donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Si on note $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f| = \sup_{[-\pi, \pi]} |f|$, on a les majorations

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\hat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\hat{f}(n) e^{-|n|t} e^{inx}| &= |\hat{f}(n)| e^{-|n|t} \leq \|f\|_\infty e^{-|n|t} \end{aligned}$$

Etant donné que les séries $\sum_{n \geq 0} e^{-|n|t}$ et $\sum_{n \leq -1} e^{-|n|t}$ sont convergentes, on en déduit la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) e^{-|n|t} e^{inx}$ et $\sum_{n \leq -1} \hat{f}(n) e^{-|n|t} e^{inx}$ donc la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-|n|t} e^{inx}$.

9. Le résultat est immédiat en reprenant l'argumentaire de la question **I.3.a** étant donné que la suite $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée et l'on a

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^{p+q} \Phi_f}{\partial t^p \partial x^q}(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) (-|n|)^p (in)^q e^{-|n|t} e^{inx}$$

10. Soit $t > 0$, x fixé dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(y)dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(y-x)} e^{-|n|t} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in(y-x)} e^{-|n|t} f(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-in(y-x)} e^{-|n|t} f(y) dy \end{aligned}$$

Etant donné que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left| f(y) e^{-in(y-x)} e^{-|n|t} \right| = |f(y)| e^{-|n|t} \leq \|f\|_{\infty} e^{-|n|t}$$

les séries $\sum_{n \geq 0} f(y) e^{-in(y-x)} e^{-|n|t}$ et $\sum_{n \leq -1} f(y) e^{-in(y-x)} e^{-|n|t}$ convergent normalement par rapport à y sur $[-\pi, \pi]$, ce qui permet d'échanger les symboles d'intégration et de sommation

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(y)dy &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(y-x)} e^{-|n|t} f(y) dy + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(y-x)} e^{-|n|t} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(y-x)} e^{-|n|t} f(y) dy = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iny} f(y) dy \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|t} e^{inx} \hat{f}(n) = \Phi_{f,t}(x) \end{aligned}$$

11. $p = 0$: D'après la question **I.2**, on a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(y) dy = 1$. La fonction P_t étant 2π -périodique, on a $\int_{a-\pi}^{a+\pi} P_t(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} P_t(y) dy$ quel que soit $a \in \mathbb{R}$. En particulier, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y) dy \underset{z=x-y}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} P_t(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(z) dz = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow f(x) = f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y) f(x) dy$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} |\Phi_{f,t}(x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(y)dy - \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)f(x)dy \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y)[f(y) - f(x)]dy \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P_t(x-y)| |f(y) - f(x)| dy \\ &\underset{P_t \geq 0}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y) |f(y) - f(x)| dy \end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $[-\pi, \pi]$ qui est un segment donc elle y est uniformément continue. Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a_{\varepsilon} > 0 \quad / \quad \forall x, y \in [-\pi, \pi], \quad |x - y| \leq a_{\varepsilon} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, $P_t \rightarrow 0$ uniformément sur $[-\pi, -a_{\varepsilon}] \cup [a_{\varepsilon}, \pi]$ c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon' > 0, \quad \exists t_{\varepsilon'} > 0 \quad / \quad \forall t \in]0, t_{\varepsilon'}] \Rightarrow |P_t(z)| \leq \varepsilon \quad \forall z \in [-\pi, \pi] \text{ et } |z| \geq a_{\varepsilon}$$

En décomposant l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y) |f(y) - f(x)| dy$ selon que $|y - x| \leq a_{\varepsilon}$ ou que $|y - x| > a_{\varepsilon}$, en choisissant $\varepsilon' = \varepsilon$ et en remarquant que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(y) - f(x)| \leq |f(y)| + |f(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} = 2\|f\|_{\infty},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\forall x &\in [-\pi, \pi], \\
|\Phi_{f,t}(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{y \in [-\pi, \pi] \\ |y-x| \leq a_{ge}}} P_t(x-y) |f(y) - f(x)| dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{y \in [-\pi, \pi] \\ |y-x| > a_{ge}}} P_t(x-y) |f(y) - f(x)| dy \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{y \in [-\pi, \pi] \\ |y-x| \leq a_{ge}}} P_t(x-y) \varepsilon dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{y \in [-\pi, \pi] \\ |y-x| > a_{ge}}} \varepsilon \cdot 2 \|f\|_{\infty} dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\substack{y \in [-\pi, \pi] \\ |y-x| \leq a_{ge}}} P_t(x-y) dy + \frac{2\varepsilon \|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_{\substack{y \in [-\pi, \pi] \\ |y-x| > a_{ge}}} dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x-y) dy + \frac{2\varepsilon \|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy = \varepsilon + 2\varepsilon \|f\|_{\infty} = \varepsilon(1 + 2\|f\|_{\infty})
\end{aligned}$$

En remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{1 + 2\|f\|_{\infty}}$, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi_{f,t} = f$ uniformément sur $[-\pi, \pi]$. Etant donné que les fonctions f (par définition) et $\Phi_{f,t}$ sont 2π -périodiques car

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{f,t}(x + 2\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x + 2\pi - y) f(y) dy \stackrel{P_t \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x - y) f(y) dy = \Phi_{f,t}(x),$$

on en déduit la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$p \leq k$: Commençons par remarquer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{f,t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x - y) f(y) dy \stackrel{z=x-y}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} P_t(z) f(x - z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(z) f(x - z) dz$$

car la fonction $z \mapsto P_t(z) f(x - z)$ est 2π -périodique. Montrons par récurrence sur $p \leq k$ la propriété

$$(\mathcal{H}_p) : \text{ " } \Phi_{f,t} \text{ est de classe } C^p \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{f,t}^{(p)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(z) f^{(p)}(x - z) dz \text{ "}$$

Initialisation $p = 0$: Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{f,t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(z) f(x - z) dz$ donc $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{H}_p)$ vraie avec $p \leq k - 1$ et montrons $(\mathcal{H}_{p+1})$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{f,t}^{(p)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(z) f^{(p)}(x - z) dz.$$

La fonction $(z, x) \mapsto P_t(z) f^{(p)}(x - z)$ est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur un segment entraîne que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(z) f^{(p)}(x - z) dz = \Phi_{f,t}^{(p)}(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\Phi_{f,t}^{(p+1)}(x) = \left(\Phi_{f,t}^{(p)} \right)'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(z) f^{(p+1)}(x - z) dz$$

ce qui démontre $(\mathcal{H}_{p+1})$ et achève la récurrence.

Etant donné que

$$\forall p \leq k, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{f,t}^{(p)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(z) f^{(p)}(x - z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_t(x - y) f^{(p)}(y) dy$$

et que la fonction $f^{(p)}$ est continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, l'étude du cas $p = 0$ montre que $\Phi_{f,t}^{(p)}$ converge uniformément vers $f^{(p)}$.

Troisième partie

12. La fonction $u \mapsto \frac{(1+u)^\alpha}{1+u^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 1 (car $\frac{(1+u)^\alpha}{1+u^\alpha} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u^\alpha}{u^\alpha} = 1$) donc elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$ ce qui entraîne l'existence de $\mu_\alpha \in \mathbb{R}$ (positif en fait car la fonction est positive sur $\mathbb{R}_+$) tel que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{(1+u)^\alpha}{1+u^\alpha} \leq \mu_\alpha \underset{1+u^\alpha \geq 0}{\Leftrightarrow} (1+u)^\alpha \leq \mu_\alpha(1+u^\alpha).$$

13. (a) Si $f \in C_{\text{per}}^0$ alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ est convergente. En outre, si $f \in C_{\text{per}}^k$ alors $\widehat{f^{(k)}}(n) = i^k n^k \widehat{f}(n)$ et $f^{(k)} \in C_{\text{per}}^0$ donc la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f^{(k)}}(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2k} |\widehat{f}(n)|^2$$

est convergente. D'après la question **III.12**, il existe un réel positif μ_k tel que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1+n^2)^k &\leq \mu_k(1+n^{2k}) \Rightarrow \\ (1+n^2)^k |\widehat{f}(n)|^2 &\leq \mu_k(1+n^{2k}) |\widehat{f}(n)|^2 = \mu_k |\widehat{f}(n)|^2 + \mu_k n^{2k} |\widehat{f}(n)|^2 \end{aligned}$$

Etant donné que les séries $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^{2k} |\widehat{f}(n)|^2$ sont convergentes, on en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^k |\widehat{f}(n)|^2$ est convergente ce qui montre que $f \in E_k$ donc $C_{\text{per}}^k \subset E_k$.

- (b) La réponse est négative. Pour cela, considérons la fonction f 2π -périodique, impaire définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est 2π -périodique mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ bien que

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi-x}{2} \right) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-(\pi-x) \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n} \Rightarrow \widehat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{i}{2n} & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = -\frac{i}{2n} & \text{si } n \leq -1 \\ \frac{1}{2}a_0 = 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par contre, $f \in E_0$ car

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^0 |\widehat{f}(n)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

donc $E_0 \neq C_{\text{per}}^0$. Soit $k \in \mathbb{N}$, en considérant la fonction F 2π -périodique dont la valeur sur $]0, \pi[$ est une fonction de classe C^k dont la dérivée k -ième vaut f . Alors F est une fonction de C^k par morceaux mais pas C^k (car f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$). Par contre,

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{F^{(k)}}(n)| = |i^k n^k \widehat{F}(n)| = |n|^k |\widehat{F}(n)| \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}^\times} (1+n^2)^k |\widehat{F}(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^\times} \frac{(1+n^2)^k}{n^{2k}} |\widehat{f}(n)|^2$$

Puisque $\frac{(1+n^2)^k}{n^{2k}} |\widehat{f}(n)|^2 \underset{n \rightarrow \pm\infty}{\sim} |\widehat{f}(n)|^2 \geq 0$ et que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}^\times} |\widehat{f}(n)|^2$ converge donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}^\times} (1+n^2)^k |\widehat{F}(n)|^2$ converge donc $F \in E_k$ ce qui démontre que $E_k \neq C_{\text{per}}^k$.

- (c) $k \equiv 0$: Soit $f \in C_{\text{per}}^{\text{pm}}$ tel que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^\alpha |\widehat{f}(n)|^2$ converge avec $\alpha > \frac{1}{2}$. Montrons que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|$ converge.

En utilisant la majoration classique $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |\widehat{f}(n)| = \left((1+n^2)^{\alpha/2} |\widehat{f}(n)| \right) \frac{1}{(1+n^2)^{\alpha/2}} \leq \frac{1}{2} (1+n^2)^\alpha |\widehat{f}(n)|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+n^2)^\alpha}$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^\alpha \left| \widehat{f}(n) \right|^2$ converge ainsi que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+n^2)^\alpha}$ converge puisque $\frac{1}{(1+n^2)^\alpha} \underset{n \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ qui est une série de Riemann convergente car $2\alpha > 1$. Par conséquent, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(n) \right|$ converge.

Considérons la fonction $g : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ qui est clairement 2π -périodique. La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto \widehat{f}(n) e^{inx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique. Par unicité des coefficients de Fourier des fonctions continues, on a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ et l'égalité de Parseval nous donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f - g}(n) \right|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(n) - \widehat{g}(n) \right|^2 = 0$$

Ainsi la fonction $|f - g|^2$ est continue et positive sur $[-\pi, \pi]$, d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$ donc

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad |f(x) - g(x)|^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Les fonctions f et g sont égales sur $[-\pi, \pi]$ et comme elles sont 2π -périodiques, elles sont égales sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$k \in \mathbb{N}$: Montrons par récurrence sur k que $f \in C_{\text{per}}^k$. L'initialisation est prouvée dans le cas $k = 0$! Justifions l'hérédité. Soit $f \in E_{k+1}$ alors $f \in E_k$ puisque

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad (1+n^2)^k \left| \widehat{f}(n) \right|^2 \leq (1+n^2)^{k+1} \left| \widehat{f}(n) \right|^2.$$

donc f est de classe C^k par hypothèse de récurrence. La fonction $f^{(k)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cas $k = 0$, on a

$$f^{(k)} : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f^{(k)}}(n) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^k \widehat{f}(n) e^{inx}$$

Montrons que $f^{(k)}$ est de classe C^1

- La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^k \widehat{f}(n) e^{inx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (d'après le cas $k = 0$).
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto (in)^k \widehat{f}(n) e^{inx}$ est de classe C^1 .
- On a $\frac{d}{dx} \left((in)^k \widehat{f}(n) e^{inx} \right) = (in)^{k+1} \widehat{f}(n) e^{inx}$ et

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad & \left| (in)^{k+1} \widehat{f}(n) e^{inx} \right| = |n|^{k+1} \left| \widehat{f}(n) \right| \leq \left((1+n^2)^{1/2} \right)^{k+1} \left| \widehat{f}(n) \right| = (1+n^2)^{(k+1)/2} \left| \widehat{f}(n) \right| \\ & = (1+n^2)^{\alpha/2} \left| \widehat{f}(n) \right| (1+n^2)^{(k+1-\alpha)/2} \leq \frac{1}{2} (1+n^2)^\alpha \left| \widehat{f}(n) \right|^2 + \frac{1}{2} (1+n^2)^{k+1-\alpha} \\ & \leq \frac{1}{2} (1+n^2)^\alpha \left| \widehat{f}(n) \right|^2 + \frac{1}{2} (1+n^2)^{k+1-\alpha} \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^\alpha \left| \widehat{f}(n) \right|^2$ est convergente (car $f \in E_\alpha$) ainsi que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^{k+1-\alpha}$ puisque

$$(1+n^2)^{k+1-\alpha} \underset{n \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2(\alpha-k-1)}} \geq 0$$

et la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2(k+1-\alpha)}}$ converge car $2(\alpha - k - 1) > 2(k+1 + \frac{1}{2} - k - 1) = 1$.

Par conséquent, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^{k+1} \widehat{f}(n) e^{inx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation des séries montre que la fonction $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^k \widehat{f}(n) e^{inx} = f^{(k)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^{k+1} ce qui démontre $(\mathcal{H}_{k+1})$ et achève la récurrence.

14. Un changement de variable $y = tx$ nous donne

$$C = t^{r+1} \int_0^{+\infty} x^r e^{-tx} dt \underset{y=tx}{=} \int_0^{+\infty} y^r e^{-y} dy = \Gamma(r+1).$$

15. La fonction $g : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^r e^{-tn}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (puisque c'est le cas de chaque fonction $t \mapsto e^{-nt}$ puisque $n \geq 1$) donc elle admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en 0^+ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^\times$, $g(t) \leq L$. Supposons $L \in \mathbb{R}$ et fixons $N \in \mathbb{N}^\times$. Etant donné que chaque terme $n^r e^{-tn}$ est positif alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \sum_{n=1}^N n^r e^{-tn} \leq g(t) \leq L \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \sum_{n=1}^N n^r e^{-tn} \leq L$$

Puisqu'il s'agit d'une somme finie de fonctions possédant une limite en 0^+ , en faisant tendre t vers 0^+ , on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^N n^r \leq L$$

La suite $\left(\sum_{n=1}^N n^r\right)$ est clairement croissante (somme de termes positifs) et majorée donc elle converge, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} n^r$ ce qui est absurde car $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $n^r \geq n^0 = 1$ donc $n^r \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. Par conséquent, $L = +\infty$.

16. On souhaite utiliser la comparaison série-intégrale. Pour cela, on considère la fonction $\varphi_r : y \mapsto y^r e^{-ty}$ qui est clairement C^1 sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall y \in [1, +\infty[, \quad \varphi'_r(y) = y^{r-1}(r - ty) \leq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{r}{t}$$

Ainsi φ_r est décroissante sur $\left[\frac{r}{t}, +\infty\right[$ et intégrable sur $\left[\frac{r}{t}, +\infty\right[$ (car intégrable sur $\mathbb{R}_+^\times$) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \forall n \geq \left\lfloor \frac{r}{t} \right\rfloor + 2, \quad \varphi_r(n) &= \int_{n-1}^n \varphi_r(n) dy \leq \int_{n-1}^n \varphi_r(y) dy \\ \Rightarrow \sum_{n=\left\lfloor r/t \right\rfloor + 2}^{+\infty} \varphi_r(n) &\leq \sum_{n=\left\lfloor r/t \right\rfloor + 2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \varphi_r(y) dy = \int_{\left\lfloor r/t \right\rfloor + 1}^{+\infty} \varphi_r(y) dy \\ \varphi_r(\left\lfloor r/t \right\rfloor + 1) &\leq \varphi_r\left(\frac{r}{t}\right) = \left(\frac{r}{t}\right)^r e^{-r} = r^r e^{-r} t^{-r} \end{aligned}$$

La fonction φ_r est croissante sur $]0, \frac{r}{t}]$ donc

$$\begin{aligned} \forall n \leq \left\lfloor \frac{r}{t} \right\rfloor - 1, \quad \varphi_r(n) &= \int_n^{n+1} \varphi_r(n) dy \leq \int_n^{n+1} \varphi_r(y) dy \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\left\lfloor r/t \right\rfloor - 1} \varphi_r(n) &\leq \sum_{n=0}^{\left\lfloor r/t \right\rfloor} \int_{n-1}^n \varphi_r(y) dy = \int_0^{\left\lfloor r/t \right\rfloor} \varphi_r(y) dy \\ \varphi_r(\left\lfloor r/t \right\rfloor) &\leq \varphi_r\left(\frac{r}{t}\right) = r^r e^{-r} t^{-r} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_r(n) &= \sum_{n=0}^{\left\lfloor r/t \right\rfloor - 1} \varphi_r(n) + \sum_{n=\left\lfloor r/t \right\rfloor + 2}^{+\infty} \varphi_r(n) + \varphi_r(\left\lfloor r/t \right\rfloor) + \varphi_r(\left\lfloor r/t \right\rfloor + 1) \\ &\leq \int_0^{\left\lfloor r/t \right\rfloor} \varphi_r(y) dy + \int_{\left\lfloor r/t \right\rfloor + 1}^{+\infty} \varphi_r(y) dy + 2r^r e^{-r} t^{-r} \\ &\leq \int_0^{+\infty} \varphi_r(y) dy + 2r^r e^{-r} t^{-r} \leq \frac{\Gamma(r+1) + 2r^r e^{-r} t}{t^{r+1}} \leq \frac{\Gamma(r+1) + 2r^r e^{-r} \tau}{t^{r+1}} \end{aligned}$$

On choisit $\tau = \Gamma(r+1) + 2r^r e^{-r}$.

17. (a) Puisque $f \in E_\alpha$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$ donc $f \in C_{\text{per}}^0$ (d'après la question **III.13.c**) et d'après la question **II.9**, $\Phi_{f,t}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ par rapport à t et

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{f,t}(x) = i \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \widehat{f}(n) e^{-|n|t} e^{inx}$$

On fixe $N \in \mathbb{N}$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les sommes finies ainsi que la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^\alpha |\widehat{f}(n)|^2$ (car $f \in E_\alpha$), on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-N}^N n \widehat{f}(n) e^{-|n|t} e^{inx} \right| &= \left| \sum_{n=-N}^N \left[(1+n^2)^{\alpha/2} \widehat{f}(n) \right] \left[n(1+n^2)^{-\alpha/2} e^{-|n|t} e^{inx} \right] \right| \\ &\leq \left(\sum_{n=-N}^N (1+n^2)^\alpha |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N}^N n^2 (1+n^2)^{-\alpha} |e^{-|n|t} e^{inx}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^\alpha |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N}^N n^2 (1+n^2)^{-\alpha} e^{-|n|(2t)} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N n^2 (1+n^2)^{-\alpha} e^{-|n|(2t)} &= \sum_{n=-N}^{-1} n^2 (1+n^2)^{-\alpha} e^{-|n|(2t)} + \sum_{n=1}^N n^2 (1+n^2)^{-\alpha} e^{-|n|(2t)} \\ &= 2 \sum_{n=1}^N n^2 (1+n^2)^{-\alpha} e^{-n(2t)} \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1+n^2)^{-\alpha} e^{-n(2t)} \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (n^2)^{-\alpha} e^{-n(2t)} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2-2\alpha} e^{-n(2t)} \\ &\leq C' (2t)^{-(2-2\alpha)-1} = C' 2^{2\alpha-3} t^{2\alpha-3} \end{aligned}$$

où C' est la constante déterminée à la question **III.16**. Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \sum_{n=-N}^N n \widehat{f}(n) e^{-|n|t} e^{inx} \right| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^\alpha |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} (C')^{1/2} 2^{\alpha-3/2} t^{\alpha-3/2}$$

En posant $C'' = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1+n^2)^\alpha |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} (C')^{1/2} 2^{\alpha-3/2}$ et en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\forall (t, x) \in]0, \tau] \times \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{f,t}(x) \right| \leq C'' t^{\alpha-3/2}$$

- (b) Soient $t, s \in]0, \tau]$, $t \geq s$, x fixé dans $\mathbb{R}$, on a

$$|\Phi_{f,t}(x) - \Phi_{f,s}(x)| = \left| \int_s^t \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{f,u}(x) du \right| \leq \int_s^t \left| \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{f,u}(x) \right| du \leq \int_s^t C'' u^{\alpha-3/2} du = \frac{C''}{\alpha-1/2} [t^{\alpha-1/2} - s^{\alpha-1/2}]$$

Etant donné que $\alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{2} > 0$, en faisant tendre s vers 0, on a $s^{\alpha-1/2} \rightarrow 0$ et $\Phi_{f,s}(x) \rightarrow f(x)$ (question **II.11**) donc

$$\forall (t, x) \in]0, \tau], \quad |\Phi_{f,t}(x) - f(x)| = \frac{C''}{\alpha-1/2} t^{\alpha-1/2} \Rightarrow \|\Phi_{f,t} - f\|_\infty \leq \frac{C''}{\alpha-1/2} t^{\alpha-1/2}$$

et l'on pose $C''' = \frac{C''}{\alpha-1/2}$ pour conclure.