

Mines MP2 2018

A. Quelques exemples

- 1) On considère $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in [0, \pi]$. On a $S(\theta)^2 = I_2$ et il y en a une infinité.

la matrice $A = I_2$ admet une infinité de racines carrées

Soit X une racine carrée de $A = I_2$ qui soit un polynôme en A

Ceci nous fournit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $X = P(I_2)$

Alors $X = P(1)I_2$ et $I_2 = X^2 = P(1)^2 I_2$ donc $P(1) \in \{-1, 1\}$ donc $X \in \{I_2, -I_2\}$

La réciproque étant évidente :

Les racines carrées de I_2 qui sont des polynômes en A sont les matrices I_2 ou $-I_2$

- 2) Je note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = A$, $AJ = JA = A^2 = 0$

donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(J + \lambda A)^2 = A$ ainsi A admet une infinité de racines carrées

On suppose l'existence de X polynôme en A qui soit une racine carrée de A .

Comme on a $\forall k \geq 2$, $A^k = 0$, ceci nous fournit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X = aI_3 + bA$

De plus $A = X^2 = a^2 I_3 + 2abA$

Par coefficients diagonaux, on trouve $a = 0$ donc $A = X^2 = 0$

Aucune racine carrée de A n'est un polynôme en A

- 3) **Existence :** Comme A est symétrique réelle, le théorème spectral nous fournit $\Omega \in O(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (où les λ_i sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicités) tel que $A = \Omega D \Omega^\top$.

Comme A est définie positive, on peut écrire $D = \delta^2$ où $\delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

de sorte que $\delta^2 = D$ et ainsi $(\Omega \delta \Omega^\top)^2 = A$

De plus les valeurs propres de $\Omega \delta \Omega^\top$ sont strictement positives car $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sqrt{\lambda_i} > 0$

et $(\Omega \delta \Omega^\top)^\top = (\Omega^\top)^\top \delta^\top \Omega^\top = \Omega \delta \Omega^\top$

Ainsi $\Omega \delta \Omega^\top$ est racine carrée de A symétrique réelle définie positive.

Unicité : Soit B une racine carrée de A symétrique réelle définie positive.

Je note respectivement a et b les endomorphismes de \mathbb{R}^n canoniquement associés aux matrices A et B .

Soit $\lambda \in \text{Sp}(a)$. On a $\lambda > 0$.

Comme $a \circ b = a^3 = b \circ a$, $E_\lambda(a)$ est stable par b .

Je note Id_λ l'identité de $E_\lambda(a)$ et b_λ l'endomorphisme induit par b sur $E_\lambda(a)$

Soit $\mu \in \text{Sp}(b_\lambda)$. Soit x un vecteur propre de b_λ associé à μ

On a $a(x) = b^2(x)$ donc $\lambda x = b(\mu x) = \mu b(x) = \mu^2 x$

Comme $x \neq 0$, on a $\mu^2 = \lambda$ et ainsi $\mu = \sqrt{\lambda}$ car $\mu \in \text{Sp}(b_\lambda) \subset \text{Sp}(b) = \text{Sp}(B) \subset]0, +\infty[$

La matrice B étant symétrique réelle, l'endomorphisme b est symétrique car la base canonique est ortho-normée. Ainsi l'endomorphisme induit b_λ est symétrique donc diagonalisable or $\text{Sp}(b_\lambda) \subset \{\sqrt{\lambda}\}$

Par conséquent $b_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{Id}_\lambda$. Ainsi

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(a), \forall x \in E_\lambda(a), b(x) = \sqrt{\lambda} x \quad (1)$$

or $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(a)} E_\lambda(a)$ car A est diagonalisable

Ainsi l'application linéaire b et donc B sont entièrement déterminées par la relation (1)

Ce qui nous donne l'unicité.

Conclusion : A admet une unique racine carrée symétrique réelle définie positive

B. Existence et calcul d'une racine carrée

- 4) Je note $U^2 = (v_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on sait que par produit U^2 est triangulaire supérieure et donc pour $1 \leq j < i \leq n$, alors $v_{i,j} = 0 = t_{i,j}$ et de plus $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_{i,i} = u_{i,i}^2$

L'équation $U^2 = T$ est donc équivalente au système
$$\begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leq i \leq n) \\ v_{i,j} = t_{i,j} & (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$$

Pour $1 \leq i < j \leq n$, on a $v_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} u_{i,k}u_{k,j} + u_{i,i}u_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} + u_{i,j}u_{j,j} + \sum_{k=j+1}^n u_{i,k}u_{k,n}$

Avec les sommes vides valant 0 et comme pour $k > \ell$, on a $u_{k,\ell} = 0$, on a : $v_{i,j} = (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j}$

donc $v_{i,j} = t_{i,j} \iff (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j}$

L'équation $U^2 = T$ est donc équivalente au système
$$\begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leq i \leq n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} & (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$$

Je cherche à construire une solution U telle que $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

En dessous de la diagonale : Pour $i > j$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, je pose $u_{i,j} = 0$ de sorte que U soit triangulaire supérieure

La diagonale : Soit $1 \leq i \leq n$, on a $t_{i,i} \in \mathbb{C}^*$, car $t_{i,i} \neq 0$ car T inversible.

Si $t_{i,i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ pour $1 \leq i \leq n$, alors l'équation $z^2 = t_{i,i}$ admet deux solutions opposées de parties réelles non nulles. Je choisis $u_{i,i}$ tel que $\operatorname{Re}(u_{i,i}) > 0$ et $u_{i,i}^2 = t_{i,i}$, il y a un seul choix possible en fonction de $t_{i,i}$.

Si $t_{i,i} \in \mathbb{R}_*^-$, alors l'équation $z^2 = t_{i,i}$ admet deux solutions opposées imaginaires pures non nulles ; je choisis $u_{i,i}$ tel que $\operatorname{Im}(u_{i,i}) > 0$ si $u_{i,i}^2 = t_{i,i}$, il y a un seul choix possible en fonction de $t_{i,i}$.

Pour i, j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, par l'absurde, si on avait $u_{i,i} + u_{j,j} = 0$ alors on aurait $t_{i,i} = u_{i,i}^2 = (-u_{i,i})^2 = u_{j,j}^2 = t_{j,j}$ donc $u_{i,i} = u_{j,j}$ (par unique choix) donc $u_{i,i} = 0$ absurde par construction

Ainsi on a bien $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$, on se servira de cela pour la suite de la construction.

Au dessus de la diagonale : Il reste à construire les $u_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq n$. On va le faire par récurrence sur $\sigma = j - i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ pour $1 \leq i < j \leq n$ en s'assurant de la relation :

$$(u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j}$$

L'initialisation Pour $\sigma = 1$, on pose pour $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $u_{i,i+1} = \frac{t_{i,i+1} - \sum_{k=i+1}^{i+1-1} u_{i,k}u_{k,i+1}}{u_{i,i} + u_{i+1,i+1}} = \frac{t_{i,i+1}}{u_{i,i} + u_{i+1,i+1}}$

Pour l'hérédité : soit $\sigma \in \llbracket 1, n - 2 \rrbracket$ tel que tous les coefficients $u_{i,j}$, ont été définis pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $j - i \leq \sigma$. Soit $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $j - i = \sigma + 1$.

On remarque que $j - 1 = \sigma + 1 \geq 2$ et ainsi $\llbracket i + 1, j - 1 \rrbracket \neq \emptyset$.

Je pose $u_{i,j} = \frac{t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j}}{u_{i,i} + u_{j,j}}$ ce qui est possible car $u_{i,i}, u_{j,j}, u_{i,k}$ et $u_{k,j}$ pour $k \in \llbracket i + 1, j - 1 \rrbracket$ sont déjà définis en effet $1 \leq k - i \leq j - i - 1 \leq \sigma$ et $1 \leq j - k \leq j - i - 1 \leq \sigma$.

La matrice U ainsi construite est telle que $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $U^2 = T$

- 5) Le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ selon d'Alembert Gauss donc A est trigonalisable, ce qui nous fournit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$.

Comme A est inversible alors T l'est également,

on peut donc appliquer la question précédente ce qui nous fournit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U^2 = T$

et ainsi $A = (PUP^{-1})^2$ donc $\boxed{A \text{ admet } PUP^{-1} \text{ comme racine carrée}}$

En outre, on suppose que les valeurs propres de A appartiennent à $\tilde{\mathbb{C}}$.

Les valeurs propres de la racine carrée de A sont celles de T car elles sont semblables

La matrice triangulaire T a ses coefficients diagonaux dans $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ car il s'agit de ses valeurs propres alors en reprenant la construction précédente, les coefficients diagonaux de U sont de parties réelles strictement positives

Les valeurs propres de **cette** racine carrée de A sont celles de U car U est semblable à PUP^{-1}

$\boxed{\text{Dans ce cas, } A \text{ admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive}}$

C. Algorithme de Newton

- 6) On écrit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a donc $AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on a $0 \leq \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}|$ (inégalité triangulaire)

et selon Cauchy-Schwarz appliqué dans \mathbb{R}^n : $\left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right)$

d'où $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2 \right)$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur \mathbb{R}^+ , on a $\boxed{\|AB\| \leq \|A\| \|B\|}$

- 7) **une écriture du polynôme minimal** : On sait que les racines du polynôme minimal d'une matrice carrée sont les valeurs propres de cette matrice.

Comme $m_A \in \mathbb{C}[X]$ est scindé, on peut alors écrire

$$m_A(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{n_\lambda} \quad \text{avec } \forall \lambda \in \text{Sp}(A), n_\lambda \geq 1$$

l'équivalence demandée : D'après l'écriture précédente, on a $m_A(B) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{n_\lambda}$

d'où $m_A(B)$ est inversible si et seulement si $0 \neq \det(m_A(B)) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \det(B - \lambda I_n)^{n_\lambda}$

ce qui équivaut à $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \chi_B(\lambda) \neq 0$ ou encore $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \lambda \notin \text{Sp}(B)$

Ainsi $\boxed{\text{la matrice } m_A(B) \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ et } B \text{ n'ont aucune valeur propre commune}}$

l'implication demandée : On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

On montre alors par récurrence immédiate que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = M B^k$

Puis par combinaison linéaire, on obtient $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = M P(B)$

en particulier $0 = m_A(A)M = M m_A(B)$ comme M est non nulle alors $m_A(B)$ n'est pas inversible

Par la contraposée de la réciproque de l'implication précédente, on a

$\boxed{\text{s'il existe } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ non nulle telle que } AM = MB, \text{ alors } A \text{ et } B \text{ ont au moins une valeur propre commune}}$

8) On suppose qu'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$. Comme $\chi_B = \chi_{B^\top}$, on a $\lambda \in \text{Sp}(B^\top)$

Ceci nous fournit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, tel que $AX = \lambda X$ et $B^\top Y = \lambda Y$

On pose $M = XY^\top = (x_i y_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On a $M \neq 0$ car il existe i et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tel que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$ et donc $x_i y_j \neq 0$

De plus $AM = AXY^\top = \lambda XY^\top$ et $MB = XY^\top B = X(B^\top Y)^\top = X(\lambda Y)^\top = \lambda XY^\top$

si A et B ont au moins une valeur propre commune, alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$

9) On voit ici $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie ($2n^2$)

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $F(X+H) = (X+H)^2 - A = X^2 + HX + XH + H^2 - A = F(X) + HX + XH + H^2$

On a $\|H^2\| \leq \|H\|^2$ d'après 6 donc $H^2 \underset{H \rightarrow 0}{=} o(H)$

Or l'application $H \mapsto HX + XH$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F(X+H) = F(X) + HX + XH + \underset{H \rightarrow 0}{o}(H)$

donc F est différentiable en X (donc sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

et la différentielle dF_X de F en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est donnée par $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), dF_X(H) = XH + HX$

Comme dF_X est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie

alors dF_X est inversible équivaut à dF_X injective c'est à dire $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}, dF_X(H) \neq 0$

ainsi dF_X est inversible si et seulement si $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}, HX \neq (-X)H$

à l'aide de 7 et 8, on a donc

dF_X est inversible si et seulement si X et $-X$ n'ont aucune valeur propre commune

On suppose que dF_X est inversible donc X et $-X$ n'ont aucune valeur propre commune.

Par l'absurde si X n'était pas inversible alors $-X = (-I_n)X$ non plus

et 0 serait une valeur propre commune de X et $-X$. Absurde! Si dF_X est inversible, alors X est inversible

À ce stade du problème, on peut dire directement que les valeurs propres de $-X$ sont les opposés de celles de X .

10) Comme les valeurs propres de A sont dans $\tilde{\mathbb{C}}$, leurs racines carrées ont des parties réelles non nulles.

Par construction en Q5, les valeurs propre de $X^* = \sqrt{A}$ ont des parties réelles strictement positives

donc les valeurs propre de $-X^*$ ont des parties réelles strictement négatives car $\text{Sp}(-X^*) = \{-\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(X^*)\}$

donc X^* et $-X^*$ n'ont aucune valeur propre commune

D'après la question précédente que dF_{X^*} est inversible

De plus l'application F est de classe \mathcal{C}^∞ car ces fonctions composantes sont polynomiales

donc comme F est de classe \mathcal{C}^1 , ainsi sa différentielle $X \mapsto dF_X$ est continue

par composition l'application $\varphi : X \mapsto \det(dF_X)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers \mathbb{C}

Or \mathbb{C}^* est un ouvert de \mathbb{C} donc $\Omega = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \varphi(X) \neq 0\} = \varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Or comme dF_{X^*} est inversible, on a $X^* \in \Omega$

Ce qui nous fournit $r > 0$, tel que $\forall X \in \overline{B}(X^*, r), \varphi(X) \neq 0$

Il existe bien $r > 0$ tel que dF_X soit inversible pour tout $X \in \overline{B}(X^*, r)$

11) On a $F(X^*) = (X^*)^2 - A = 0$ donc $G(X^*) = X^* - (dF_{X^*})^{-1}(0) = X^*$

Soit $H \in B(0, r)$.

On a $dF_{X^*} \circ (\text{Id} + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H) = dF_{X^*} + dF_H$

or $\forall Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (dF_{X^*} + dF_H)(Z) = X^*Z + ZX^* + HZ + ZH = (X^* + H)Z + Z(X^* + H) = dF_{X^*+H}(Z)$

donc $dF_{X^*+H} = dF_{X^*} \circ (\text{Id} + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)$

or $X^* + H \in B(X^*, r)$, on peut donc passer à l'inverse d'après la question précédente ce qui donne

$$(dF_{X^*+H})^{-1} = (\text{Id} + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)^{-1} \circ (dF_{X^*})^{-1}$$

Par ailleurs $G(X^* + H) = X^* + H - (dF_{X^*+H})^{-1}(F(X^* + H))$

or $F(X^* + H) = (X^*)^2 + H^2 + X^*H + HX^* - A = H^2 + X^*H + HX^*$ donc en utilisant la linéarité de $(dF_{X^*+H})^{-1}$, on a :

$$G(X^* + H) - G(X^*) = H - (dF_{X^*+H})^{-1}(H^2 + X^*H + HX^*)$$

or $dF_{X^*+H}(H) = (X^* + H)H + H(X^* + H) = 2H^2 + X^*H + HX^*$ et donc $H^2 + X^*H + HX^* = dF_{X^*+H}(H) - H^2$ en utilisant la linéarité de $(dF_{X^*+H})^{-1}$ et $((dF_{X^*+H})^{-1} \circ dF_{X^*+H})(H) = H$ on obtient :

$$G(X^* + H) - G(X^*) = H - (dF_{X^*+H})^{-1}(dF_{X^*+H}(H) - H^2) = H - H + (dF_{X^*+H})^{-1}(H^2)$$

On a bien pour tout $H \in B(0, r)$, $G(X^* + H) - G(X^*) = (dF_{X^*+H})^{-1}(H^2)$

12) Soit $H \in B(0, r)$. En utilisant les deux relations précédentes on a

$$G(X^* + H) - G(X^*) = \left((\text{Id} + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)^{-1} \circ (dF_{X^*})^{-1} \right) (H^2)$$

Je munis $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ d'une norme notée N , ce qui est possible car l'espace est de dimension finie.

Comme l'application $(\psi, X) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \psi(X)$, est bilinéaire donc continue car tous les espaces de dimension finie cela nous fournit $K_1 > 0$, tel que

$$\forall (\psi, X) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\psi(X)\| \leq K_1 N(\psi) \cdot \|X\|$$

de même il existe $K_2 > 0$ tel que

$$\forall (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, N(\psi_1 \circ \psi_2) \leq K_2 N(\psi_1) \cdot N(\psi_2)$$

Pour établir ces inégalités, on aurait pu faire comme en 6) pour la première et utiliser 6 pour la deuxième en substituant n par n^2 .

La différentielle dF est continue, donc $H \mapsto dF_H$ est continue sur $\overline{B}(0, r)$

donc $H \mapsto \text{Id} + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H$ est continue sur $\overline{B}(0, r)$ à valeurs dans $\text{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$

car $\forall H \in \overline{B}(0, r)$, $dF_{X^*+H} \in \text{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ selon 10

De plus pour $p \in \mathbb{N}^*$, les applications \det et $M \mapsto (\text{com}(M))^T$ sont continues sur $\text{GL}_p(\mathbb{C})$ car polynomiales à valeurs respectivement dans \mathbb{C}^* et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

donc $M \mapsto M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} (\text{com}(M))^T$ est continue sur $\text{GL}_p(\mathbb{C})$

Ainsi dans E un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension finie, par composition par les isomorphismes qui associe endomorphismes et matrices via une base choisie l'application $\psi \in \text{GL}(E) \mapsto \psi^{-1}$ est continue

d'où par composition l'application $M \mapsto (\text{Id} + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)^{-1}$ est continue sur $\overline{B}(0, r)$

comme $\overline{B}(0, r)$ est compact en tant que fermé et borné en dimension finie ceci nous fournit $K_3 > 0$ tel que

$$\forall H \in \overline{B}(0, r), N\left((\text{Id} + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)^{-1}\right) \leq K_3$$

donc pour $H \in B(0, r) \subset \overline{B}(0, r)$, on a en utilisant la question 6,

$$\|G(X^* + H) - G(X^*)\| = K_1 K_2 K_3 N\left((dF_{X^*})^{-1}\right) \|H^2\| \leq K_1 K_2 K_3 N\left((dF_{X^*})^{-1}\right) \|H\|^2$$

On a $N\left((dF_{X^*})^{-1}\right) > 0$ car $(dF_{X^*})^{-1}$ est inversible. En prenant $C = K_1 K_2 K_3 N\left((dF_{X^*})^{-1}\right)$

on a $C > 0$ et pour tout X de $B(X^*, r)$, on a l'inégalité $\|G(X) - X^*\| \leq C \|X - X^*\|^2$

13) On va montrer l'inégalité $\|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$

Je prends $\rho = \min(r, \frac{1}{C})$. Ainsi $C\rho^2 \leq \rho \leq r$ et on a $B(X^*, \rho) \subset B(X^*, r)$,
Soit $X_0 \in B(X^*, \rho)$.

On va montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{P}_k : X_k \text{ est bien défini, } X_k \in B(X^*, \rho) \text{ et } \|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$$

Initialisation : On a bien X_0 est bien défini et $X_0 \in B(X^*, \rho)$

De plus On a $\|X_0 - X^*\| \leq \rho = \frac{(\rho C)^{2^0}}{C}$

Ainsi l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que X_k est bien défini, $X_k \in B(X^*, \rho)$ et $\|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$.

D'après 11., comme G est définie sur $\overline{B}(X^*, r)$, alors $X_{k+1} = G(X_k)$ est bien défini car $B(X^*, \rho) \subset \overline{B}(X^*, r)$

Puis d'après 12., on a $\|X_{k+1} - X^*\| \leq C\|X_k - X^*\|^2$

or $\|X_k - X^*\| \leq \rho$ donc $\|X_{k+1} - X^*\| \leq C\rho^2 \leq \rho$

ainsi $X_{k+1} \in B(X^*, \rho)$

et $\|X_{k+1} - X^*\| \leq C\|X_k - X^*\|^2 \leq C \frac{(\rho C)^{2 \times 2^k}}{C^2} = \frac{(\rho C)^{2^{k+1}}}{C}$

ce qui termine l'hérédité

Conclusion On a montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_k est vraie

ainsi il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $X_0 \in B(X^*, \rho)$ la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bien définie et vérifie, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$$

En imposant de plus $\rho < 1/C$, la suite (X_k) converge vers X^*

D. Forme équivalente

14) On suppose que la suite (X_k) est bien définie par **(N)**.

On a $X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. et pour $k \in \mathbb{N}$, on a $X_{k+1} = X_k - (dF_{X_k})^{-1}(F(X_k))$

Si je note $H_k = -(dF_{X_k})^{-1}(F(X_k)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

on a $X_{k+1} = X_k + H_k$ et $dF_{X_k}(H_k) = -F(X_k)$ d'où $X_k H_k + H_k X_k = A - X_k^2$

Ceci prouve l'existence d'une suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par **(I)**

Je considère maintenant une suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par **(I)**.

Je vais montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_k = X_k$

Initialisation : On a bien $U_0 = X_0$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k = X_k$.

On a dF_{U_k} inversible car $X_{k+1} = U_k - (dF_{U_k})^{-1}(F(U_k))$

En posant $H_k = -(dF_{U_k})^{-1}(F(U_k))$ on vérifie que $U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2$

de sorte que $U_{k+1} = U_k + H_k = X_k - (dF_{X_k})^{-1}(F(X_k)) = X_{k+1}$

Conclusion On a bien $\forall k \in \mathbb{N}$, $U_k = X_k$

Ainsi on a bien l'existence et l'unicité d'une suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par (\mathbf{I}) vérifiant $U_0 = X_0$

Si (X_k) est bien définie par (\mathbf{N}) et $U_0 = X_0$, alors $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (\mathbf{I}) et égale à $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$

On suppose que la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (\mathbf{I}) et $X_0 = U_0$

Alors on peut procéder de manière analogue pour montrer l'existence et l'unicité de la suite (X_k)

Soit $k \in \mathbb{N}$. Le point qui diffère ici est de justifier le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, dF_{U_k} est inversible.

Comme la suite U_{k+1} est bien définie par (\mathbf{I}) , alors l'énoncé donne implicitement qu'il existe une unique H_k tel que $U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2$

donc $A - U_k^2$ admet un unique antécédent par dF_{U_k}

or par l'absurde si l'endomorphisme dF_{U_k} n'était pas inversible,

l'ensemble d'antécédents : $(dF_{U_k})^{-1}(\{A - U_k^2\})$ serait vide ou bien un sous-espace affine de direction $\text{Ker}(dF_{U_k})$ donc de cardinal nul ou infini (et non pas un)

Ceci étant absurde on a bien dF_{U_k} inversible, ce qui permet de conclure

si $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (\mathbf{I}) et $X_0 = U_0$, alors la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (\mathbf{N}) et égale à $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$

15) Comme les suites (U_k) et (X_k) sont bien définies et égales alors U_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Je considère alors la suite (G_k) définie par $G_k = \frac{1}{2}(U_k^{-1}A - U_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On va montrer par récurrence sur k , la propriété \mathcal{P}_k :

$$V_k \text{ est bien définie, } G_k = H_k, V_k A = A V_k \text{ et } V_k = U_k$$

Initialisation : $U_0 = V_0$ commute avec A

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_k .

Ainsi $V_{k+1} = \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A)$ est une matrice bien définie car $V_k = U_k$ est inversible

De plus $V_k A = A V_k$, on a ainsi $A V_k^{-1} = V_k^{-1} A$ puis $V_{k+1} A = A V_{k+1}$

On remarque que $U_k G_k + G_k U_k = A - U_k^2$ car $U_k = V_k$ et A commutent

donc $G_k = H_k = U_{k+1} - U_k$

Et $V_{k+1} = \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A) = V_k + G_k = U_k + H_k = U_{k+1}$

ce qui prouve \mathcal{P}_{k+1}

Conclusion : On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, \mathcal{P}_k .

la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (\mathbf{II}) et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k = V_k$ commute avec A

16) D'après l'énoncé la suite (V_k) est bien définie.

On fait une démonstration par récurrence.

Initialisation On a bien $V_0 = \mu I_n$ symétrique définie positive car $\mu > 0$ et e_1, \dots, e_n sont des vecteurs propres de V_0

Hérédité Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que V_k est symétrique définie positive et e_1, \dots, e_n sont des vecteurs propres de V_k .

On a $V_{k+1} e_\ell = \frac{1}{2}(V_k e_\ell + V_k^{-1} A e_\ell) = \frac{1}{2}(\lambda_{k,\ell} e_\ell + \lambda_k V_k^{-1} e_\ell) = \frac{1}{2} \left(\lambda_{k,\ell} + \frac{\lambda_k}{\lambda_{k,\ell}} \right) e_\ell$

or $\lambda_{k,\ell} e_\ell = V_k e_\ell$ et $\lambda_{k,\ell} > 0$

Comme (e_1, \dots, e_n) est une base, on a $\text{Sp}(V_{k+1}) = \left\{ \frac{1}{2} \left(\lambda_{k,i} + \frac{\lambda_k}{\lambda_{k,i}} \right) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\} \subset]0, +\infty[$

De plus $V_{k+1}^\top = \left(\frac{1}{2}(V_k^{-1}A + V_k) \right)^\top = \frac{1}{2} \left((V_k^{-1})^\top A^\top + V_k^\top \right) = \frac{1}{2} \left((V_k^\top)^{-1} A + V_k \right) = V_{k+1}$

Ainsi V_{k+1} est symétrique définie positive et e_1, \dots, e_n sont des vecteurs propres de V_{k+1}

Conclusion on a montré par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

V_k est symétrique réelle définie positive de vecteurs propres e_1, \dots, e_n et $\lambda_{k+1,i} = \frac{\lambda_{k,i}}{2} + \frac{\lambda_k}{2\lambda_{k,i}}$

17) On va montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a la propriété $\mathcal{H}_p : \frac{\lambda_{p,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{p,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^{2^p}$

Initialisation : On a $\lambda_{0,\ell} = \mu$ et $2^0 = 1$ donc $\frac{\lambda_{0,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{0,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^{2^0}$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{H}_k .

$$\text{On a } \lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell} = \frac{\lambda_{\ell,i}^2 + \lambda_\ell - 2\lambda_{\ell,i}\sqrt{\lambda_\ell}}{2\lambda_{\ell,i}} = \frac{(\lambda_{\ell,i} - \sqrt{\lambda_\ell})^2}{2\lambda_{\ell,i}}$$

$$\text{et de même } \lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} = \frac{(\lambda_{\ell,i} + \sqrt{\lambda_\ell})^2}{2\lambda_{\ell,i}}$$

Comme $\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} > 0$ par somme, on a

$$\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\lambda_{\ell,i} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{\ell,i} + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^2$$

$$\text{Ainsi } \frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^{2^{k+1}}$$

Conclusion : On a établi notre propriété par récurrence.

Ainsi comme $k+1 \in \mathbb{N}$, on a bien

$$\boxed{\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^{2^{k+1}}}$$

18) On a $|\mu - \sqrt{\lambda_\ell}| < \mu + \sqrt{\lambda_\ell}$ car $\mu > 0$ et $\sqrt{\lambda_\ell} > 0$ Ainsi $\left| \frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right| < 1$

Je note $u_k = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^{2^k}$. On a donc $\frac{\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ car $2^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$

donc $\lambda_{k,\ell}(1 - u_k) = \sqrt{\lambda_\ell}(1 + u_k)$

Comme $1 - u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, pour k assez grand on a $1 - u_k \neq 0$

$$\text{d'où } \lambda_{k,\ell} = \sqrt{\lambda_\ell} \frac{1 + u_k}{1 - u_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \sqrt{\lambda_\ell}$$

Je note $\Delta_k = \text{diag}(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$

en regardant le limite coefficients par coefficients, on a $\Delta_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

Je note $\delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

Je remarque que $P\Delta_k P^T = V_k$

Comme l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PMP^T$ est linéaire en dimension finie, cette application est continue.

$$\text{donc } P\Delta_k P^T = V_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P\delta P^T$$

Il est clair que la matrice $P\delta P^T$ est symétrique à valeurs propres strictement positives

$$\text{De plus } (P\delta P^T)^2 = P\delta P^T P\delta P^T = P\delta^2 P^T = PDP^T = A$$

Ainsi $P\delta P^T = \sqrt{A}$ donc $\boxed{\text{la suite } (V_k) \text{ converge vers } \sqrt{A}}$

E. Stabilité

19) On sait que V_0 est inversible donc

$$(V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}) = I_n - \Delta V_0^{-1} + \Delta V_0^{-1} - \Delta V_0^{-1}\Delta V_0^{-1} = I_n - \Delta V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}$$

$$\text{Ainsi } (V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}) = I_n - \varepsilon^2 \sqrt{A}^{-1} C_i C_j^\top \sqrt{A}^{-1} C_i C_j^\top$$

$$\text{Or } \sqrt{A} C_i = \sqrt{\lambda_i} C_i \text{ donc } \sqrt{A}^{-1} C_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} C_i$$

$$\text{donc } (V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}) = I_n - \frac{\varepsilon^2}{\lambda_i} C_i C_j^\top C_i C_j^\top$$

Comme P est orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormée et ainsi $C_j^\top C_i = 0$
d'où $(V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}) = I_n$ ce qui prouve que

$$V_0 + \Delta \text{ est inversible et } \boxed{(V_0 + \Delta)^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}}$$

$$\text{On a } 2\Delta_1 = 2\widehat{V}_1 - 2V_1 = \widehat{V}_0 + \widehat{V}_0^{-1}A - V_0 - V_0^{-1}A = \Delta + (V_0 + \Delta)^{-1}A - V_0^{-1}A$$

$$\text{or } V_0^{-1}A = \sqrt{A}^{-1}\sqrt{A}^2 = \sqrt{A} = V_0 \text{ et avec l'égalité}$$

$$\text{on a } 2\Delta_1 - \Delta = V_0^{-1}A - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A - V_0 = V_0 - V_0 - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A$$

$$\text{On a bien } \boxed{\Delta_1 = \frac{1}{2}(\Delta - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A)}$$

$$20) \text{ On a } \Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A = \frac{1}{2}\Delta - \frac{\varepsilon}{2}V_0^{-1}C_i C_j^\top V_0 = \frac{1}{2}\Delta - \frac{\varepsilon}{2}V_0^{-1}C_i(C_j V_0)^\top$$

$$\text{donc } \Delta_1 = \frac{1}{2}\Delta - \frac{\varepsilon\sqrt{\lambda_j}}{2\sqrt{\lambda_i}} C_i C_j^\top$$

$$\text{On trouve alors } \Delta_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}} \right) \Delta$$

On remarque que par récurrence $\forall k \in \mathbb{N}, V_k = \sqrt{A}$ car $\sqrt{A}^{-1}A = \sqrt{A}$

On peut alors montrer par récurrence que la suite $(\widehat{V}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que

$$\boxed{\text{en prenant } \eta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}} \right), \text{ on a } \forall k \in \mathbb{N}, \widehat{V}_k = \sqrt{A} + \eta^k \Delta}$$

$$21) \text{ On a } \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}} \leq \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}} = \gamma \text{ où } \gamma \text{ désigne le conditionnement}$$

La suite $(\widehat{V}_k)_{k \geq 0}$ converge si et seulement si $-1 < \eta < 1$.

$$\text{or } \frac{1}{2} \geq \eta \geq \frac{1 - \sqrt{\gamma}}{2}$$

$$\text{donc si } \gamma < 9 \text{ alors } \frac{1 - \sqrt{\gamma}}{2} > \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1$$

$\boxed{\text{Si le conditionnement est inférieur strictement à 9, la suite } (\widehat{V}_k)_{k \geq 0} \text{ converge}} \text{ (condition suffisante)}$