Préliminaire

1.a) $\rightarrow$ $\|e_1'\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{1+1+1} = 1$ donc $\boxed{e_1' \text{ est unitaire}}$.

$\rightarrow$ $n = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P et $e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,n$ donc $\boxed{e_1' \text{ dirige } \Delta}$.

1.b) $\rightarrow$ $\|e_2'\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{1+1+0} = 1$ donc $\boxed{e_2' \text{ est unitaire}}$.

$\rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 0 = 0$ donc $\boxed{e_2' \in P}$.

1.c) Si $e_3' = e_1' \wedge e_2'$ alors (e_1', e_2', e_3') est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

On obtient $\boxed{e_3' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}$.

2.a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{a+b+c}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{f_{a,b,c}(e_1') = (a+b+c)e_1'}$.

Comme e_1' est non nul,

$\boxed{a+b+c \text{ est valeur propre de } f_{a,\,b,\,c} \text{ et } e_1' \text{ est un vecteur propre associé}}$.

2.b) e_2' et e_3' sont orthogonaux à e_1' donc ce sont deux vecteurs de P.

Comme, ils sont unitaires et orthogonaux entre eux, $\boxed{(e_2', e_3') \text{ est une base orthonormale de } P}$.

2.c) $\rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t\!\left[\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(a-b \quad c-a \quad b-c)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

donc $f(e_2') \perp e_1'$ et, par suite, $\boxed{f(e_2') \in P}$.

$\rightarrow$ $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\,{}^t\!\left[\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(a+b-2c \quad c+a-2b \quad b+c-2a)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$

donc $f(e_3') \perp e_1'$ et, par suite, $\boxed{f(e_3') \in P}$.

2.d) $\forall u \in P,\ \exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ u = \alpha e_1' + \beta e_2'$

$f_{a,\,b,\,c}$ étant linéaire, $f_{a,\,b,\,c}(u) = \alpha f_{a,\,b,\,c}(e_2') + \beta f_{a,\,b,\,c}(e_3') \in P$

comme combinaison linéaire de deux vecteurs de P.

Par suite: $\boxed{P \text{ est stable par } f_{a,\,b,\,c}}$.

Quelques exemples

3.a) $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(e_3, e_1, e_2)$ donc $\boxed{\text{rg(J) = 3 et, par suite, J est inversible}}$.

3.b) $P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$

$\boxed{P_J(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+1)}$ et, pour $\lambda^2 + \lambda + 1$, $\Delta = -3 < 0$.

Le polynôme caractéristique de J n'est pas scindé
donc $\boxed{\text{J n'est ni diagonalisable, ni même trigonalisable dans } M_3(\mathbb{R})}$.

3.c) Note: comme on n'a pas calculé explicitement $f_{a, b, c}(e_2')$ et $f_{a, b, c}(e_3')$ dans le préliminaire, on utilise la formule de changement de bases.

La matrice de passage de la base canonique à la base B' est $P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathrm{Mat}_{B'}(\psi) = P^{-1}.J.P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$.

3.d) La matrice précédente s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

Donc $\boxed{\psi \text{ est la rotation d'axe } \overrightarrow{\mathrm{Vect}}(e_1') \text{ et d'angle } -\frac{2\pi}{3}}$.

4.a) $M_2 \times M_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{M_2 \times M_2 = I_3}$.

Par suite, M_2 est inversible avec $M_2^{-1} = M_2$ d'où $\boxed{\mathrm{rg}(M_2) = 3}$.

4.b) ${}^tM_2 = M_2 = M_2^{-1}$ donc $M_2 \in O(3)$ et M_2 est symétrique.
Par suite, $\boxed{\text{l'endomorphisme } s \text{ canoniquement associé à } M_2 \text{ est une symétrie orthogonale}}$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = E_1(s) \Leftrightarrow x + y + z = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = P}$.

Par suite, $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = E_{-1}(s) = E_1(s)^{\perp}$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = \Delta}$.

4.c) Le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est un plan vectoriel donc 1 est valeur propre d'ordre au moins deux.
Le sous espace propre associé à la valeur propre –1 est une droite vectorielle donc – 1 est valeur propre d'ordre au moins un.
$P_{M_2}(\lambda)$ étant un polynôme de degré 3 et de coefficient dominant -1, $\boxed{P_{M_2}(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2}$.

5.a) $M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\text{rg}(M_1) = 1}$ car $C_1 = C_2 = C_3$ et $C_1 \neq O$.

Par suite, $\boxed{M_1 \text{ n'est pas inversible}}$ car $\text{rg}(M_1) \neq 3$.

5.b) $P_{M_1}(\lambda) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 1-3\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-3\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-3\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3\lambda \end{vmatrix}$

$\boxed{P_{M_1}(\lambda) = (1-\lambda)\lambda^2}$.

5.c) $\rightarrow$ 1 est valeur propre simple et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(M_1)$ car la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

Donc $\boxed{E_1(M_1) = \Delta}$.

$\rightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(M_1) \Leftrightarrow x + y + z = 0$ donc $\boxed{E_0(M_1) = P}$.

5.d) $\mathbb{R}^3 = \Delta \oplus P = E_1(M_1) \oplus E_0(M_1)$ donc $\boxed{M_1 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

$M_1.M_1 = M_1$ donc l'endomorphisme canoniquement associé à M_1 est un projecteur.
Plus précisément, c'est $\boxed{\text{la projection sur } \Delta \text{ parallèlement à } P}$.

Etude des matrices $M(a, b, c)$

6) $j^3 = (e^{i\,2\pi/3})^3 = e^{i\,2\pi}$ donc $\boxed{j^3 = 1}$.

$1 + j + j^2 = 1 + e^{i\,2\pi/3} + e^{i\,4\pi/3} = 1 + e^{i\,2\pi/3} + e^{-i\,2\pi/3} = 1 + 2Re(e^{i\,2\pi/3}) = 1 + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$

donc $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

7) $\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ et, par suite, $\boxed{M(a, b, c) = aI_3 + bJ + cJ^2}$.

8.a) $P_J(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1)$.
D'après ce qui précède, j est racine évidente de $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$
et, comme ce polynôme est à coefficients réels, sa seconde racine est $\overline{j} = j^2$.
Donc $\boxed{Sp_{\mathbb{C}}(J) = \{\, 1_{(1)}, j_{(1)}, j^2_{(1)} \,\}}$.

Le polynôme caractéristique de J est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}_3[X]$
donc $\boxed{\text{J est diagonalisable sans } M_3(\mathbb{C})}$.

8.b) $\rightarrow$ L'endomorphisme canoniquement associé à J étant une rotation d'axe Δ, $E_1(J) = \Delta = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(On pouvait aussi dire que la somme des coefficients de chaque ligne valait 1).

$\rightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_j(J) \Leftrightarrow \begin{cases} -jx + y = 0 \\ -jy + z = 0 \\ x - jz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = jz \\ y = j^2 z \\ z \in \mathbb{C} \end{cases}$ d'où $E_j(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\rightarrow$ Comme la matrice J est à coefficients réels, en tenant compte de $\overline{j} = j^2$, $\boxed{E_{j^2}(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Par suite, $\boxed{J = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}}$.

8.c) $P^{-1} J^2 P = P^{-1}(PDP^{-1})(PDP^{-1})P = (P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)$ donc $\boxed{P^{-1} J^2 P = D^2}$.

Il est immédiat que: $\boxed{P^{-1} I_3 P = I_3}$.

9.a) $P^{-1}.M(a, b, c).P = P^{-1}.(aI_3 + bJ + cJ^2)P = aI_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a + bj + cj^2 & 0 & 0 \\ 0 & a + bj^2 + cj & 0 \\ 0 & 0 & a + b + c \end{pmatrix}$.

Par suite: $\boxed{\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ M(a, b, c) \text{ est diagonalisable dans } M_3(\mathbb{C})}$

et $\boxed{Sp_{\mathbb{C}}[M(a, b, c)] = \{\, a + b + c,\ a + bj + cj^2,\ a + bj^2 + cj \,\}}$.

9.c) Comme a, b et c sont des réels,

$\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Re}(a+b+c) = a+b+c \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(a+b+c) = 0}$.

En tenant compte de $\mathrm{Re}(j) = \mathrm{Re}(j^2) = -\dfrac{1}{2}$ et de $\mathrm{Im}(j) = -\mathrm{Im}(j^2) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Re}(a+bj+cj^2) = a - \dfrac{b+c}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(a+bj+cj^2) = (b-c)\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

$\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{Re}(a+bj^2+cj) = a - \dfrac{b+c}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(a+bj^2+cj) = (c-b)\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

9.c) Les trois valeurs propres de $M(a, b, c)$ sont réelles si et seulement si

$(b-c)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = (c-b)\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$ donc si et seulement si $\boxed{b = c}$.

10) Si $b \neq c$ alors le polynôme caractéristique de $M(a, b, c)$ possède une racine réelle et deux racines complexes conjuguées non réelles.
Par suite, $\mathrm{P}_{M(a, b, c)}$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}_3[X]$.

On en déduit que: $\boxed{\text{si } b \neq c,\ M(a, b, c) \text{ n'est ni diagonalisable ni trigonalisable dans } M_3(\mathbb{C})}$.

11.a) $\rightarrow$ Si $b = c = 0$ alors $M(a, b, c) = a\mathrm{I}_3$ d'où $\boxed{\mathrm{Sp}(f_{a,0,0}) = \{\, a_{(3)} \,\} \text{ et } \mathrm{E}_a(f_{a,0,0}) = \mathbb{R}^3}$.

$\rightarrow$ Si $b = c \neq 0$ alors $\boxed{\mathrm{Sp}(f_{a,b,b}) = \{\, a+2b_{(1)},\ a-b_{(2)} \,\}}$ car, dans ce cas, $a + 2b \neq a - b$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_{a+2b}(f_{(a,b,b)}) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathrm{E}_{a+2b}(f_{(a,b,b)}) = \Delta}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{E}_{a-b}(f_{(a,b,b)}) \Leftrightarrow x+y+z=0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathrm{E}_{a-b}(f_{(a,b,b)}) = P}.$$

11.b) La matrice $M(a, b, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ est symétrique à coefficients réels.

Donc $f_{(a, b, b)}$ est diagonalisable et il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $f_{(a, b, b)}$.
La matrice Q de passage entre la base canonique et cette nouvelle base est une matrice de passage entre deux bases orthonormales donc c'est une matrice orthogonale.
Pour une telle matrice, on sait que ${}^t\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{-1}$.

Par suite: $\boxed{\mathrm{D}(a, b) = {}^t\mathrm{Q}.M(a, b, c).\mathrm{Q}}$

avec $\boxed{\mathrm{D}(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\mathrm{Q} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}}$.

Application: étude de projecteurs

12.a) D'après 9.c, si $b \neq c$ alors $f_{a,b,c}$ n'admet qu'une valeur propre réelle.

D'après 11.a, $\begin{cases} \text{si } b = c = 0 \text{ alors } f_{a,0,0} \text{ n'admet qu'une valeur propre réelle} \\ \text{si } b = c \neq 0 \text{ alors } f_{a,b,b} \text{ admet deux valeurs propres réelles} \end{cases}$

Donc $\boxed{f_{a,b,c} \text{ admet deux valeurs propres réelles distinctes si et seulement si } \begin{cases} b = c \\ b \neq 0 \end{cases}}$.

12.b) $\mathrm{Sp}[M(a,b,c)] = \{\ 0, 1\ \} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$

Donc $\boxed{\mathrm{Sp}[M(a,b,c)] = \{\ 0, 1\ \} \Leftrightarrow (a, b) \in \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}}$.

12.c) Il est immédiat que:

(1) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Sp}(f_{a,b,c}) = \{\ 0, 1\ \} \Leftrightarrow (a, b) \in \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\} \Leftrightarrow$ (2)

→ Le cas $a = b = c = \frac{1}{3}$ correspond à la matrice M_1 qui a été étudié à la question 5.

$\boxed{f_{1/3,\,1/3,\,1/3} \text{ est la projection sur } \Delta \text{ parallèlement à } P}$.

→ Le cas $a = \frac{2}{3}$ et $b = c = -\frac{1}{3}$ donne $E_{a+2b} = E_0 = \Delta$ et $E_{a-b} = E_1 = P$.

$\boxed{f_{2/3,\,-1/3,\,-1/3} \text{ est la projection sur } P \text{ parallèlement à } \Delta}$.