

Partie I

1. $\text{card}(\mathfrak{M}_n(\{-1, 1\})) = 2^{n^2}$ et $\mathfrak{M}_n(\{-1, 1\})$ n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas la matrice nulle.

2. Notons $A = (a_{i,j})$, on a pour $(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2$, ${}^tXAY = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{i,j}x_iy_j$.

$$\text{D'où } |{}^tXAY| \leq \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} 1 = n^2.$$

Comme $a_{i,j}x_iy_j$ est impair, ${}^tXAY = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{i,j}x_iy_j$ a même parité que $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} 1 = n^2$

donc pour $n \geq 1$, $S(A) \subset \{-n^2, -n^2 + 2, \dots, n^2 - 2, n^2\} \subsetneq \{-n^2, \dots, 0, \dots, n^2\}$.

Enfin, $k \in S(A) \Rightarrow \exists (X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2$, ${}^tXAY = k$

Or $-k = {}^t(-X)AY$ donc $-k \in S(A)$.

3. Pour $(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2$, ${}^tXBY = {}^t({}^tCX)A(DY)$ et $({}^tCX, DY) \in (\{-1, 1\}^n)^2$.

donc $S(B) \subset S(A)$.

Comme $A = C^{-1}BD^{-1}$ avec C^{-1}, D^{-1} diagonales ne contenant que des 1 et des -1 , on a également $S(A) \subset S(B)$.

$$4. \bullet S(I) = \left\{ \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2} x_iy_j = \left(\sum_{i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket} x_i \right) \left(\sum_{i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket} y_i \right) \mid x_i, y_j \text{ dans } \{-1, 1\} \right\}$$

$$\text{Donc } S(I) = \{2 \times 2, 0, -2 \times 2\} = \boxed{\{-4, 0, 4\}}$$

• Pour la matrice J , on trouve

$${}^tX \cdot J \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2 = {}^tX \cdot I \cdot Y - 2x_2y_2$$

donc $S(J) \subset \{r + 2|r \in S(I)\} \cup \{r - 2|r \in S(I)\}$. De plus, on sait que $S(J)$ est inclus dans $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$ donc $S(J) \subset \{-2, 2\}$.

Réciproquement, l'ensemble $S(J)$ est symétrique et non vide donc $\boxed{S(J) = \{-2, 2\}}$

• Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\{-1, 1\})$. En agissant sur les lignes puis sur la deuxième colonne de A , on peut construire deux matrices diagonales C et D à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telles que $CAD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\text{Ainsi, } S(A) = S\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \{-4, 0, 4\} & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \{-2, 2\} & \text{si } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

5.

• (a) **Hypothèse** $n^2 \in S(A)$.

On a $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \underbrace{a_{i,j}x_iy_j}_{\in \{-1, 1\}} = n^2$ donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}x_iy_j = 1$, c'est-à-dire $a_{i,j} = x_iy_j$ (puisque toutes les variables

sont dans $\{-1, 1\}$).

Ainsi, $A = X^tY$ avec $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$.

• (b) **Hypothèse** $A = X^tY$.

Alors A est de rang 1 puisque $\text{Im } A = \text{Vect}(X)$ avec $X \neq 0$.

• (c) **Hypothèse** A est de rang 1.

Donc $\text{Im } A = \text{Vect}(X)$ avec $X \neq 0$.

En notant (e_i) la base canonique, on définit y_i tel que $Ae_i = y_iX$.

Il vient $A = X^tY$ avec $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ (car $A \neq 0$).

Comme $A \in \mathfrak{M}_n(\{-1, 1\})$. On a $x_1y_1 = 1$.

On peut choisir $x_1 = 1$ quitte à remplacer (X, Y) par $\left(\frac{1}{x_1}X, x_1Y\right)$ en ayant toujours $A = X^tY$.

Ainsi, $Y \in (\{-1, 1\})^n$ en regardant la première ligne de A puis $X \in (\{-1, 1\})^n$ en regardant la première colonne de A ($y_1 \in \{-1, 1\}$).

On obtient donc (b).

• Il nous reste à montrer (b) \Rightarrow (a).

Hypothèse $A = X^tY$. On a

$${}^tXAY = {}^tXX^tYY = \|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 = n^2 \text{ avec } \|\cdot\| \text{ norme euclidienne canonique}$$

donc $n^2 \in S(A)$.

6. Lemme pour $(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \in ((\{-1, 1\})^n)^4$,

$$X {}^t Y = \tilde{X} {}^t \tilde{Y} \Leftrightarrow (X, Y) = (\tilde{X}, \tilde{Y}) \text{ ou } (X, Y) = (-\tilde{X}, -\tilde{Y})$$

(on reprend le même raisonnement en regardant par exemple la première ligne et la première colonne).

Ainsi, pour compter les matrices A de la forme $X {}^t Y$, on compte les couples (X, Y) et on divise le total par deux.

$$\text{card}(A \in \mathfrak{M}_n(\{-1, 1\}) \mid n^2 \in S(A)) = \frac{\text{card}(((\{-1, 1\})^n)^2)}{2} = 2^{2n-1}$$

La proportion dans $\mathfrak{M}_n(\{-1, 1\})$ de matrices A telles que $n^2 \in S(A)$ est donc $\frac{2^{2n-1}}{2^{n^2}} = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)^2}$

Partie II

1. $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda U_1}) = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} = \text{ch } \lambda$.

Posons $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) - \frac{\lambda^2}{2}$. On a $\psi'(\lambda) = \frac{\text{sh } \lambda}{\text{ch } \lambda} - \lambda$ et $\psi''(\lambda) = \frac{1}{\text{ch}^2 \lambda} - 1 \leq 0$.

Donc ψ' est décroissante et s'annule en 0, donc ψ croit de $-\infty$ à 0 puis décroît jusqu'à $+\infty$ (concavité...), donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\psi(\lambda) \leq \psi(0) = 0$, ce qui prouve le résultat demandé.

2. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, avec la stricte croissance de l'exponentielle, on a $\{S_k \geq t\} = \{\lambda S_k \geq \lambda t\} = \{e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t}\}$ puis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_k \geq t) &= \mathbb{P}(\lambda S_k \geq \lambda t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t}) \\ &\leq \frac{1}{e^{\lambda t}} \mathbb{E}(e^{\lambda S_k}) \text{ inégalité de Markov, } e^{\lambda S_k} \text{ v.a. } \geq 0 \\ &\leq e^{-\lambda t} (\mathbb{E}(e^{\lambda U_1}))^k \text{ par mutuelle indépendance + même loi} \\ &\leq \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t). \end{aligned}$$

3. On a pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t) \leq \exp\left(\frac{k\lambda^2}{2} - \lambda t\right)$

On choisit le « meilleur » λ .

Posons $\Psi(\lambda) = \frac{k\lambda^2}{2} - \lambda t$. On a $\Psi'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{t}{k}$.

Pour $t > 0$, on choisit un tel λ , on obtient

$$\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp\left(\Psi\left(\frac{t}{k}\right)\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right)$$

4. Montrons que les $C_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes.

Première étape : la loi de $C_{i,j}$ est uniforme sur $\{\pm 1\}$ car il y a 2^{n^2-1} matrices A de $\mathfrak{M}_n(\{-1, 1\})$ telles que $a_{i,j} = 1$.

Deuxième étape : on trouve

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq i,j \leq n} \{C_{i,j} = a_{i,j}\}\right) = \frac{1}{2^{n^2}} = \prod_{1 \leq i,j \leq n} \mathbb{P}(C_{i,j} = a_{i,j})$$

car il y a exactement une matrice qui réalise ces n^2 égalités.

En conclusion, les variables aléatoires $(x_i y_j C_{i,j})_{i,j}$ sont mutuellement indépendantes car $x_i y_j$ n'est qu'une constante. Par ailleurs $C_{i,j}$ et $-C_{i,j}$ ont même loi d'où le résultat.

5. Soit $(X, Y) \in (\{-1, 1\})^n$.

Utilisons la question 3) avec $k = n^2$ et $U_1 \sim C_{1,1}$.

$$\mathbb{P}\left({}^t X C Y \geq t \cdot n^{3/2}\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2 n^3}{2n^2}\right) = \exp\left(-\frac{nt^2}{2}\right)$$

Il vient comme (point clé) $\{M(C) = \max S(C) \geq tn^{3/2}\} = \bigcup_{(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2} \{{}^tXCY \geq tn^{3/2}\},$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(M(C) \geq t \cdot n^{3/2}\right) &\leq \sum_{(X,Y) \in (\{-1,1\}^n)^2} \mathbb{P}\left({}^tXCY \geq t \cdot n^{3/2}\right) \\ &\leq 2^{2n} \exp\left(-\frac{n \cdot t^2}{2}\right) = \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2 \ln 2\right)n\right). \end{aligned}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $t = 2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon$ de sorte que $\frac{t^2}{2} > 2 \ln 2$

donc $-\left(\frac{t^2}{2} - 2 \ln 2\right)n < 0$ donc $\mathbb{P}(M(C) \geq t \cdot n^{3/2}) < 1$.

Ainsi, $\mathbb{P}(M(C) < t \cdot n^{3/2}) \neq 0$ donc $\{M(C) < t \cdot n^{3/2}\} \neq \emptyset$.

Il existe $\omega \in \{M(C) < t \cdot n^{3/2}\}$. On dispose donc d'une matrice $A = C(\omega)$ tel que $M(A) < t \cdot n^{3/2}$

Donc $\underline{M}(n) = \min_{A \in \mathfrak{M}_n(\{1,1\})} M(A) < t \cdot n^{3/2} = (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}$.

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient en faisant tendre ε vers 0, $\underline{M}(n) \leq 2\sqrt{\ln 2}n^{3/2}$

Partie III

1. Fixons $Y \in \{-1, 1\}^n$

Pour $X \in \{-1, 1\}^n$, ${}^tXAY = \sum_{i=1}^n X_i (AY)_i \leq \sum_{i=1}^n |(AY)_i| = {}^t\tilde{X}AY$

avec \tilde{X} tel que $(\tilde{X})_i = \tilde{x}_i = \text{sgn}((AY)_i)$.

Donc, le majorant étant atteint, $g_A(Y) = \sum_{i=1}^n |(AY)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right|$.

2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons \tilde{Z}_j^i tel que $Z_j = a_{i,j} (2\tilde{Z}_j^i - 1)$ de sorte que $(\tilde{Z}_j^i)_{1 \leq j \leq n}$ sont des **v.a.i.i.d. de loi de Bernoulli**

de paramètre $\frac{1}{2}$ (vues les hypothèses sur Z). Ainsi $\sum_{j=1}^n \tilde{Z}_j^i \sim \mathcal{B}(n, p)$. Écrivons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j\right|\right) &= \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} (2\tilde{Z}_j^i - 1)\right|\right) = \mathbb{E}\left(\left|2\sum_{j=1}^n \tilde{Z}_j^i - n\right|\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |2k - n| \text{ par le théorème de transfert} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_A(Z)] &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j\right|\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j\right|\right) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| \end{aligned}$$

3. 3.a ($n \geq 1$ est fixé) Prouvons le résultat par récurrence sur m .

- Pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^m (n - 2k) \binom{n}{k} = n = n \binom{n-1}{0}$, OK.

- Soit $m \geq 1$. Supposons le résultat vrai au rang $m - 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (n - 2k) \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{m-1} (n - 2k) \binom{n}{k} + (n - 2m) \binom{n}{m} \\ &= n \binom{n-1}{m-1} + (n - 2m) \binom{n}{m} \\ &= n \left(\binom{n-1}{m-1} + \binom{n}{m} \right) - 2m \binom{n}{m} \\ &= n \left(2 \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \right) - 2m \binom{n}{m} \text{ par le triangle de Pascal} \\ &= n \binom{n-1}{m} \text{ car } n \binom{n-1}{m-1} = m \binom{n}{m} \end{aligned}$$

3.b Remarquons que si $n = 2k$, $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |2k - n| = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| = \sum_{2k \leq n} \binom{n}{k} (n - 2k) + \sum_{2k > n} \binom{n}{k} |n - 2k|.$$

De plus avec $k' = n - k$ (donc $n - 2k = 2k' - n$)

$$\sum_{2k > n} \binom{n}{k} |n - 2k| = \sum_{2k' \leq n} \binom{n}{k'} (n - 2k')$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| &= 2 \left(\sum_{2k \leq n} \binom{n}{k} (n - 2k) \right) \\ &= 2n \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{ grâce à la question précédente} \end{aligned}$$

En conclusion, $\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

4. 4.a Remarquons que l'inégalité $g_A(Z) \leq M(A)$ est certaine, ce qui implique que $\mathbb{E}(g_A(Z)) \leq M(A)$.

Donc $M(A) \geq \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ donc $\underline{M}(n) = \min_{A \in \mathfrak{M}_n(\{1,1\})} M(A) \geq \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

4.b Grâce à Stirling, on sait que

$$\binom{2p}{p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi 2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{\left(\sqrt{2\pi p} \left(\frac{p}{e}\right)^p\right)^2} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{2p} \sqrt{\frac{1}{\pi p}}$$

Distinguons suivant la parité de n .

$$n = 2p, \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{2p-1}{p} = \frac{p}{2p} \binom{2p}{p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{2p-1} \sqrt{\frac{1}{\pi p}}$$

$$\text{D'où } \frac{(2p)^2}{2^{2p-1}} \binom{2p-1}{p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{4\sqrt{\frac{1}{\pi}} p^{3/2}}$$

$$n = 2p + 1, \binom{2p}{p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{2p} \sqrt{\frac{1}{\pi p}}$$

$$\text{D'où } \frac{(2p+1)^2}{2^{2p}} \binom{2p}{p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \boxed{4\sqrt{\frac{1}{\pi}} p^{3/2}}$$

Finalement, globalement,

$$\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4\sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{n}{2}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot n^{3/2}$$

À la question de la partie 6, la constante valait $2\sqrt{\ln 2}$, on a bien $2\sqrt{\ln 2} > \boxed{C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}}$

(enfin sans calculatrice, $\ln 2 \approx 0,7\dots$)

Partie IV

1. • Le vecteur Y est fixé.

Lemme (évident) soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|a| \leq n$ et $|b| \leq n$ alors $|a + b| \leq n$ ou $|a - b| \leq n$.

Dit autrement, il existe des $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ tel que $|\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b| \leq n$.

Par récurrence, si on a $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{Z}^p$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $|x_i| \leq n$ alors il existe des $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ tel que $|\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_p x_p| \leq n$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|(AY)_i| \leq n$. On dispose donc des ε_i tel que $|\varepsilon_1 (AY)_1 + \dots + \varepsilon_p (AY)_p| \leq n$.

Posons $X = {}^t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. On a ainsi $|{}^t X A Y| \leq n$.

On a donc montré que $\min \{|{}^t X A Y| \mid X \in \{-1, 1\}^n\} \leq n$.

• Comme $S(A)$ est symétrique,

$$\min(S(A) \cap \mathbb{N}) = \min(|s| \mid s \in S(A))$$

D'où

$$m(A) = \min \left\{ \underbrace{\min \{|{}^t X A Y| \mid X \in \{-1, 1\}^n\}}_{\leq n} \mid Y \in \{-1, 1\}^n \right\} \leq n$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $t = \sqrt{2n \ln(2n)} + \varepsilon$ de sorte que $2n \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right) < 1$.

Introduisons une variable aléatoire uniforme Z comme à la question III.2).

Utilisons l'inégalité de Hoeffding établie à la question II)3), on a à $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé,

$$\mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \geq t \right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right) \text{ où } S_n = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j} Z_j}_{\text{de la partie II}}.$$

De même avec $-S_n$, $\mathbb{P} \left(-\sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \geq t \right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right)$, donc, finalement,

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| \geq t \right) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right)$$

Il vient alors,

$$\mathbb{P} \left(\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| \geq t \right) \leq 2n \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right) < 1$$

Ainsi, $\mathbb{P} \left(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| < t \right) \neq 0$ donc $\left\{ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| < t \right\} \neq \emptyset$.

Il existe $\omega \in \left\{ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| < t \right\}$. On dispose de $Y = Z(\omega)$ tel que $\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Y_j \right| < t$

donc d'un vecteur $X \in \{-1, 1\}^n$ tel que $|{}^t X A Y| < t$ en reprenant l'idée du lemme de la question V.1 (on remplace le majorant n par t).

Donc $m(A) < t$, cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient en faisant tendre ε vers 0,

$$m(A) \leq \sqrt{2n \ln(2n)}$$