I Sous espaces stables

I.A -

I.A.1) D est stable par $f \Rightarrow f(a) \in D \Rightarrow f(a) = \lambda a \Rightarrow a$ est propre pour f, puisque $a \neq 0$.
Réciproquement,
a est propre pour $f \Rightarrow f(\mu a) = \mu f(a) = \mu(\lambda a) = (\mu\lambda)a$
On a montré que $\forall u \in D, \exists \mu,\ u = \mu a \Rightarrow f(u) \in D \Rightarrow D$ est stable par f.
On a bien l'équivalence demandée.

I.A.2) Le polynôme caractéristique est de degré 3 à coefficients réels, il possède donc une racine réelle au moins.
f possède donc une valeur propre λ, et un vecteur propre a,
et donc une droite $D = \mathrm{Vect}(a)$ stable par f.

I.A.3) Un polynôme réel de degré impair possède la même propriété, mais pas un polynôme de degré pair...
On aura donc le même résultat pour n impair mais pas pour n pair.

I.B -

I.B.1) On prend $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base de P qu'on complète par ε_3 pour obtenir $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, une base de E.

Dans ces bases respectives les matrices de $\tilde{f}$ et f sont respectivement $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & c & x \\ b & d & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

On a donc $P_{f'}(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix}$, et , $P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix}(z-\lambda)$.

On a bien : $\quad P_{f'}(\lambda) \Big| P_f(\lambda)$.

I.B.2) Si f' possède une droite stable, alors, il possède une valeur propre réelle ; son polynôme caractéristique, de degré 2, est donc scindé.
On a donc soit :
- 2 valeurs propres distinctes et simples et donc 2 droites stables ;
- 1 valeur propre double et un sous-espace propre de dimension 2, toutes les droites sont stables, et on a alors une infinité de droites stables ;
- 1 valeur propre double et un sous-espace propre de dimension 1, on n'a alors qu'une droite stable.

I.C -

I.C.1) Le polynôme caractéristique de g' est scindé car on est sur $\mathbb{C}$. g' possède donc au moins une valeur propre α et un vecteur propre associé ε_1.
Cette valeur propre n'est pas réelle car g n'a pas de valeur propre, et, g et g' ont le même polynôme caractéristique.
$\overline{M} = M$ car M est réelle, donc $\overline{g'} = g'$.
$\overline{g'(\varepsilon_1)} = \overline{g'}(\overline{\varepsilon_1}) = g'(\overline{\varepsilon_1})$.
On a aussi : $\overline{\alpha\varepsilon_1} = \overline{\alpha} \times \overline{\varepsilon_1}$.
Ce qui donne : $g'(\overline{\varepsilon_1}) = \overline{\alpha} \times \overline{\varepsilon_1}$.
Ce qui prouve que $\overline{\varepsilon_1}$ est propre pour g' et la valeur propre $\overline{\alpha}$.

I.C.2) ε_1 et $\overline{\varepsilon_1}$ sont propres pour des valeurs propres distinctes, ils forment donc une famille libre, et une base de F', en notant F' l'espace vectoriel *complexe* correspondant à l'espace vectoriel *réel* F.

Dans cette base, la matrice de $(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice de changement de base car son déterminant est -2.

$(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1})$ est donc une base de F'.

$g'(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}) = \alpha\varepsilon_1 + \overline{\alpha} \times \overline{\varepsilon_1} = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}) + \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1})$

$g'(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1}) = \alpha\varepsilon_1 - \overline{\alpha} \times \overline{\varepsilon_1} = \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}) + \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1})$

La matrice de g' dans cette nouvelle base est donc : $\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} & \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} \\ \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} & \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} \end{pmatrix}$.

I.C.3) On pose maintenant $u = \varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}$ et $v = \mathrm{i}(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1})$

(u, v) est clairement encore une base de F'.

$g'(u) = g'(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}) = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}) + \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1}) = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}u - \mathrm{i}\,\dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}v$

$g'(v) = \mathrm{i}\,g'(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1}) = \mathrm{i}\,\dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1}) + \mathrm{i}\,\dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1}) = \mathrm{i}\,\dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}u + \dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}v$

La matrice de g' dans la base (u, v) est donc : $\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} & \mathrm{i}\,\dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} \\ -\mathrm{i}\,\dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2} & \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} \end{pmatrix}$.

Si on appelle $\mathcal{X} = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{2}$ et $\mathcal{Y} = -\mathrm{i}\,\dfrac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}$ d'un coté, et Q la matrice de passage de la base canonique vers la base (u, v), on a bien : $M = Q\begin{pmatrix} \mathcal{X} & -\mathcal{Y} \\ \mathcal{Y} & \mathcal{X} \end{pmatrix}Q^{-1}$, avec $\mathcal{Y} \neq 0$ car α n'est pas réel.

Mais on a aussi le résultat que l'énoncé demande d'admettre :

- $\mathcal{X} = \mathfrak{Re}(\alpha)$ et $\mathcal{Y} = \mathfrak{Im}(\alpha)$
  La matrice $\begin{pmatrix} \mathcal{X} & -\mathcal{Y} \\ \mathcal{Y} & \mathcal{X} \end{pmatrix}$ est à coefficients réels.
- $u = \varepsilon_1 + \overline{\varepsilon_1} = \mathfrak{Re}(\varepsilon_1)$ et $v = \mathrm{i}(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon_1}) = \mathfrak{Im}(\varepsilon_1)$ sont aussi réels !
  La matrice Q est donc à coefficients réels, et il en est de même pour Q^{-1}.

Ce qui prouve : $M = Q\begin{pmatrix} \mathcal{X} & -\mathcal{Y} \\ \mathcal{Y} & \mathcal{X} \end{pmatrix}Q^{-1}$, avec Q réelle, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ réels, et $\mathcal{Y} \neq 0$.

I.D -

I.D.1) Comme il n'y a qu'une seule droite stable, il n'y a pas de vecteurs propres dans le plan stable, c'est à dire que $\tilde{f}$ vérifie les hypothèses du **I.C**.

Si on met bout à bout une base de la droite stable w et la base (u, v) de la question précédente, on obtient une famille libre de 3 vecteurs car $w \notin \mathrm{Vect}(u, v)$.

Comme $\mathrm{Vect}(w)$ est stable, w est propre pour la valeur propre λ.

Dans cette base (w, u, v), la matrice de f est donc : $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{X} & -\mathcal{Y} \\ 0 & \mathcal{Y} & \mathcal{X} \end{pmatrix}$, avec $\lambda, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ réels et $\mathcal{Y} \neq 0$.

I.D.2) Remarquons d'abord que $v \in P \Leftrightarrow v \,.\, n = 0 \Leftrightarrow {}^tVN = {}^tNV = 0$, en appelant U et N les vecteurs colonnes, coordonnées de v et n dans la base canonique.

$u \in P \Rightarrow f(u) \in P \Rightarrow {}^t(MU)N = 0 \Rightarrow {}^tU\,{}^tMN = 0 \Rightarrow u$ orthogonal à n', car ${}^tMN$ est le vecteur colonne des coordonnées de n' dans la base canonique.

Mais $u \in P \Leftrightarrow u$ orthogonal à n

D'où u orthogonal à $n \Rightarrow u$ orthogonal à n'

Comme c'est vrai pour tous les vecteurs de P, on a n' colinéaire à n, c'est à dire $n' = \lambda n$, ce qui équivaut à n propre pour ${}^tM$ et la valeur propre λ.

L'énoncé s'est planté, on n'est pas sûr que $n' \neq 0$, et donc qu'il est propre ! Il n'y a qu'à regarder le cas de la question précédente avec $\lambda = 0$...

Sans doute parlait-il de n et non de n'

Réciproquement, si n est propre pour l'endomorphisme de matrice ${}^tM$ et la valeur propre λ, pour $u \in P$, le plan orthogonal à n, $f(u) \cdot n = {}^t(MU)\,N = {}^tU\,{}^tMN = \lambda\,{}^tUN = \lambda u \cdot n = 0$

On en conclut que P est stable par f.

On a bien l'équivalence « P est stable par f » si et seulement si « n est propre pour l'endomorphisme de matrice ${}^tM$ dans la base canonique ».

I.D.3) Remarquons d'abord que les endomorphismes de matrice M et ${}^tM$ ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension car une matrice et sa transposée ont même déterminant et même rang.

i) $\Leftrightarrow$ iii)

f admet une unique droite stable si et seulement si le polynôme caractéristique de f admet une seule valeur propre réelle avec un sous-espace propre de dimension 1.

Pour cela, il y a deux cas, ou cette valeur propre est simple, ou elle est triple. En effet, si elle était double, il y aurait une *autre* valeur propre réelle !

i) $\Leftrightarrow$ ii)

f admet une unique droite stable si et seulement si l'endomorphisme de matrice ${}^tM$ admet une unique valeur propre réelle et un sous-espace propre de dimension 1 engendré par n, ce qui équivaut à P stable par f.

Ce plan stable est bien unique : si on en avait deux, leur intersection, une droite incluse dans ce plan serait stable. Mais $n \notin P$, il y aurait une seconde droite stable, ce qui est contraire aux hypothèses.

II Liens avec un cône

II.A -

II.A.1) Un calcul élémentaire donne : $P_M(\lambda) = -\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda + a$.

II.A.2) Le sous-espace propre est le noyau de : $\begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ a & b & c-\alpha \end{pmatrix}$.

Cette matrice est au moins de rang 2, à cause des 2 premières lignes, et n'est pas de rang 3 puisque α est valeur propre !

Elle est donc de rang 2, équivalente à ses deux premières lignes.

Le sous espace propre est de dimension 1, solution de $\begin{cases} y = \alpha x \\ z = \alpha y \end{cases}$.

On a donc : $E_\alpha = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$.

II.A.3) Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1,

donc M est donc diagonalisable si et seulement si elle admet 3 valeurs propres simples.

II.A.4) f admet une droite stable et une seule si et seulement si elle admet une unique valeur propre réelle (qui est donc soit simple soit triple).

II.B -

II.B.1) Le même calcul élémentaire donne : $P_M(\lambda) = -\lambda^3 + t^3$.

Donc, f possède une unique valeur propre réelle $\lambda = t$, donc une unique droite stable.

Ceci est aussi vrai pour l'endomorphisme de matrice ${}^tM$. On cherche un vecteur propre n pour cette matrice.

C'est un élément du noyau de : $\begin{pmatrix} -t & 0 & t^3 \\ 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix}$, solution de $\begin{cases} x = ty \\ y = tz \end{cases}$.

$n = \left(t^2, t, 1\right)$ convient.

D'après la partie précédente, l'unique plan stable est d'équation : $t^2x + ty + z = 0$.

L'unique droite stable est plus facile à trouver, c'est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre t.

C'est le noyau de : $\begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ t^3 & 0 & -t \end{pmatrix}$, solution de $\begin{cases} y = tx \\ z = ty \end{cases}$.

$D_t = \text{Vect}\left(1, t, t^2\right)$.

II.B.2) On a : $D_t \begin{cases} y = tx \\ z = ty \end{cases}$

Donc, pour un point de D_t, $y^2 - xz = (tx)^2 - x\left(t^2x\right) = 0$. Ceci prouve que $\Delta \subset \Sigma$.

Réciproquement, pour un point de Σ vérifiant $x \neq 0$, la valeur de y donne $t = \dfrac{y}{x}$, et ce point $\left(x, tx, t^2x\right)$ appartient à la droite D_t.

Mais, toujours dans Σ, si $x = 0$, alors $y = 0$ et z est libre. Tandis que dans Δ, $x = 0$ entraîne $y = z = 0$, il n'y a que l'origine.

Finalement, $\Sigma \setminus \Delta$ est constitué de la droite Oz privée de O.

II.B.3) L'intersection de Σ et du plan d'équation $z = 1$ est, dans ce plan, la courbe d'équation $x = y^2$.

C'est une parabole d'axe Ox, de sommet O, de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$, dont le tracé, élémentaire, est laissé au lecteur !

Σ est le cône de sommet O et de directrice cette parabole.

II.C -

II.C.1) $(\mathcal{S}_1)$ est aussi un cône du second degré, de sommet O. Il admet donc en tout point, **sauf en O**, un plan tangent. Ce plan tangent contient, bien sûr, la génératrice du cône qui passe par ce point, et donc le point O !

Si on écrit l'équation du cône en cartésienne, cela donne $4xz - y^2 = 0$, le gradient en M_0 est donc : $\begin{pmatrix} 4z_0 \\ -2y_0 \\ 4x_0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2z_0 \\ -y_0 \\ 2x_0 \end{pmatrix}$.

L'équation du plan tangent en M_0 est donc : $2z_0x - y_0y + 2x_0z = 0$.

II.C.2) P_t est d'équation : $t^2x + ty + z = 0$.

Ces 2 plans n'en forment qu'un si et seulement si le produit vectoriel de leurs vecteurs normaux est nul, c'est à dire si et seulement si $\begin{cases} 2x_0t - y_0 = 0 \\ 2x_0t^2 - 2z_0 = 0 \end{cases}$.

Rappelons que dans ce cas, le système est équivalent au système formé des 2 équations indépendantes.

Pour $x_0 \neq 0$, alors, $M_0 \neq O$, et, $t = \dfrac{y_0}{2x_0}$ convient dans les deux équations, compte tenu que $M_0 \in (\mathcal{S}_1)$.

Le plan tangent à $(\mathcal{S}_1)$ en M_0 est bien P_t, pour $t = \dfrac{y_0}{2x_0}$, quand $x_0 \neq 0$.

II.D -

II.D.1) $\left(\mathcal{S}_f\right)$ est d'équation cartésienne : $f(x,y) - z = 0$, dont le gradient n'est jamais nul.

L'équation de son plan tangent en M_0, est : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - z = x_0\dfrac{\partial f}{\partial x} + y_0\dfrac{\partial f}{\partial y} - z_0$.

Les dérivées partielles étant prises en (x_0, y_0).

II.D.2) Ce plan tangent doit déjà passer par l'origine.

On a donc la première condition : $x_0\dfrac{\partial f}{\partial x} + y_0\dfrac{\partial f}{\partial y} - z_0 = 0$.

Ensuite, son vecteur normal $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$ doit être colinéaire à $\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Compte tenu de la troisième coordonnée, ces vecteurs sont opposés.

Ce qui donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -t$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -t^2$.

Les deux conditions pour que le plan tangent soit un plan P_t sont donc :

$$\begin{cases} x_0\dfrac{\partial f}{\partial x} + y_0\dfrac{\partial f}{\partial y} - f(x_0, y_0) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

Si on veut que ce soit en tout point, cela devient :

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - f(x, y) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases}.$$

Les dérivées partielles étant maintenant prises en (x, y)

II.D.3) On a $\dfrac{\partial f}{\partial y} = u'(y)$ et, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = -u'(y)^2$.

Ce qui donne : $u(y) = f(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = -xu'(y)^2 + yu'(y)$.

On retient seulement $u(y) = -xu'(y)^2 + yu'(y)$, relation qu'on dérive par rapport à y.

Ce qui donne : $u'(y) = -2xu'(y)u''(y) + u'(y) + yu''(y)$.

Après simplification et factorisation : $u''(y)(y - 2xu'(y)) = 0$.

II.D.4) On primitive $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{2x}$ par rapport à y, x étant constant : $f(x,y) = \dfrac{y^2}{4x} + k(x)$.

II.D.5) Mais $f(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\left(\dfrac{y}{2x}\right)^2 + y\dfrac{y}{2x} = \dfrac{y^2}{4x}$,

qu'on égale avec $f(x,y) = \dfrac{y^2}{4x} + k(x)$, d'où $k(x) = 0$ et finalement : $f(x,y) = \dfrac{y^2}{4x}$.

Il n'y a que $(\mathcal{S}_1)$ qui vérifie la condition donnée.

III Étude d'une courbe

III.A - $P_{g_r}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ r^2 & -\lambda & -r \\ r & r & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 + r^2\right)$.

Comme $r \neq 0$, l'unique valeur propre de g_r est $\lambda = 2$, simple.

Le sous-espace propre est solution du système : $\begin{cases} r^2 x - 2y - rz = 0 \\ rx + ry - 2z = 0 \end{cases}$

On remplace la première ligne par elle même moins r fois la seconde : $\begin{cases} -\left(2+r^2\right)y + rz = 0 \\ rx + ry - 2z = 0 \end{cases}$

La première ligne donne : $z = \dfrac{2+r^2}{r} y$ et on remplace z dans la seconde ligne : $x = \dfrac{4+r^2}{r^2} y$.

Le sous-espace propre est donc d'équation : $\begin{cases} x = \dfrac{4+r^2}{r^2} y \\ z = \dfrac{2+r^2}{r} y \end{cases}$

III.B -

III.B.1) $z = 1$ donne $y = \dfrac{r}{r^2+2}$, puis, $x = \dfrac{r^2+4}{r\left(r^2+2\right)}$,

ce qui est bien la représentation paramétrique de Γ.

III.B.2) Pour un point de Γ,

$$y\left(x+y\right)^2 - x + y = \frac{r}{r^2+2}\left(\frac{r^2+4}{r\left(r^2+2\right)} + \frac{r}{r^2+2}\right)^2 - \frac{r^2+4}{r\left(r^2+2\right)} + \frac{r}{r^2+2}$$

$$= \frac{r}{r^2+2}\left(\frac{r^2+4}{r\left(r^2+2\right)} + \frac{r^2}{r\left(r^2+2\right)}\right)^2 - \frac{r^2+4}{r\left(r^2+2\right)} + \frac{r^2}{r\left(r^2+2\right)}$$

$$= \frac{r}{r^2+2}\left(\frac{2}{r}\right)^2 - \frac{4}{r\left(r^2+2\right)} = 0$$

On a donc $\Gamma \subset \Gamma'$.

III.B.3) La matrice de changement de base est : $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X-Y \\ X+Y \end{pmatrix}$$

On remplace x et y par leur valeur dans l'équation de Γ' : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(X+Y\right)\left(2X^2\right) = -Y\sqrt{2}$,

qui se réécrit : $Y = \dfrac{-X^3}{X^2+1}$. C'est l'équation de Γ' dans le nouveau repère.

IV Matrices circulantes

IV.A -

IV.A.1) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+uy+u^2z \\ z+ux+u^2y \\ y+uz+u^2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+uy+u^2z \\ u\left(x+uy+u^2z\right) \\ u^2\left(x+uy+u^2z\right) \end{pmatrix} = \left(x+uy+u^2z\right)\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix}$

Dans le calcul, on a utilisé le fait que $u^3 = 1$ et $u^4 = u$.

Ceci prouve que $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix}$ est propre pour A_V et la valeur propre $\left(x + uy + u^2 z\right)$.

IV.A.2) On appelle j le complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$,

$$P^{-1} A_V P = \begin{pmatrix} x+y+z & 0 & 0 \\ 0 & x + \mathrm{j}\,y + \mathrm{j}^2\,z & 0 \\ 0 & 0 & x + \mathrm{j}^2\,y + \mathrm{j}\,z \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont sur la diagonale !

IV.A.3) Un calcul simple donne : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A_V = xI_3 + yJ + zJ^2$

IV.A.4) Pour que f_V ait une et une seule droite stable et un et un seul plan stable,
il faut et il suffit que f_V ait une et une seule droite stable,
ou encore que, sur $\mathbb{R}$, il ait une valeur propre unique, qui sera donc $(x + y + z)$, avec un sous espace propre de dimension 1.

Cela est encore équivalent à $\left(x + \mathrm{j}\,y + \mathrm{j}^2\,z\right)$ et $\left(x + \mathrm{j}^2\,y + \mathrm{j}\,z\right)$ non réels,

ou encore $\left(\mathrm{j}\,y + \mathrm{j}^2\,z\right)$ et $\left(\mathrm{j}^2\,y + \mathrm{j}\,z\right)$ non réels,

c'est encore équivalent à $\left(\mathrm{j}\,y + \mathrm{j}^2\,z\right)$ et $\left(\mathrm{j}^2\,y + \mathrm{j}\,z\right)$ non réels, car ces deux nombres complexes sont conjugués.

Mais $\mathfrak{Im}\left(\mathrm{j}\,y + \mathrm{j}^2\,z\right) = (y - z)\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Finalement :

f_V a une et une seule droite stable et un et un seul plan stable si et seulement si $y \neq z$.

IV.A.5) Le déterminant est le produit des valeurs propres, donc :
$\det(A_V) = (x+y+z)\left(x + \mathrm{j}\,y + \mathrm{j}^2\,z\right)\left(x + \mathrm{j}^2\,y + \mathrm{j}\,z\right) = (x+y+z)\left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz\right)$, en utilisant $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ dans le développement.

IV.B - On considère dans un premier temps que l'espace d'arrivée est $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
L'application g est clairement linéaire :

$$g(\lambda V_1 + \mu V_2) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 & \lambda y_1 + \mu y_2 & \lambda z_1 + \mu z_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 & \lambda x_1 + \mu x_2 & \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 & \lambda z_1 + \mu z_2 & \lambda x_1 + \mu x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ z_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 & z_1 & x_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ y_2 & z_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

$= \lambda g(V_1) + \mu g(V_2)$

Ceci prouve que $\left\{A_V,\, V \in \mathbb{R}^3\right\}$ est bien un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, puisque c'est l'image d'un espace vectoriel par une application linéaire.

On considère maintenant que l'espace d'arrivée est $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'application g reste linéaire !

Par ailleurs, elle est clairement bijective :

on retrouve V, l'unique antécédent d'une matrice de $\left\{A_V,\, V \in \mathbb{R}^3\right\}$, en prenant simplement la première ligne de cette matrice...

IV.C -

IV.C.1) $\mathcal{S} \cap \Pi_\lambda$ est clairement vide si $\lambda = 0$, et, est d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = \dfrac{1}{\lambda}$ dans les autres cas.

Mais $(x + y + z)^2 = 1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$, d'où $xy + yz + xz = \dfrac{1 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{2}$.

On en déduit :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{2} = \frac{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 1}{2} = \frac{1}{\lambda}.$$

C'est dire que les points de $\mathcal{S} \cup \Pi_\lambda$ sont sur la sphère d'équation $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 1 = \dfrac{2}{\lambda}$.

C'est donc soit vide, soit le point O, soit un cercle d'axe qui ne dépend pas de λ, car il passe par O, le centre de la sphère, et est perpendiculaire à Π_λ, qui est de direction fixe.

$\mathcal{S} \cap \Pi_\lambda$ est donc une surface de révolution d'axe $(O, e_1 + e_2 = e_3)$.

IV.C.2) $$A_V \times A_{V'} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ z' & x' & y' \\ y' & z' & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yz' + zy' & xy' + yx' + zz' & xz' + yy' + zx' \\ xz' + yy' + zx' & xx' + yz' + zy' & xy' + yx' + zz' \\ xy' + yx' + zz' & xz' + yy' + zx' & xx' + yz' + zy' \end{pmatrix}$$

On a donc : $A_V \times A_{V'} = A_{V''}$.

Ceci prouve dans un premier temps que $\left\{A_V,\, V \in \mathbb{R}^3\right\}$ est stable pour la loi $*$, et comme le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, c'est à dire 1 dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ est stable pour la loi $*$.

Montrons que $(\mathcal{S}, *)$ est un groupe commutatif.

- $*$ est bien une loi de composition interne
- Associativité
  $A_{(V*V')*V''} = A_{(V*V')} \times A_{V''} = (A_V \times A_{V'}) \times A_{V''} = A_V \times (A_V \times A_{V''}) = A_V \times A_{V'*V''} = A_{V*(V'*V'')}$, en utilisant l'associativité du produit matriciel.
  Comme g est bijective, on a l'associativité de la loi $*$ dans $\left\{A_V,\, V \in \mathbb{R}^3\right\}$ et donc dans $\mathcal{S}$.
- Commutativité
  $xx' + yz' + zy' = x'x + y'z + z'y$, $xy' + yx' + zz' = x'y + y'x + z'z$, et $xz' + yy' + zx' = x'z + y'y + z'x$.
  La loi $*$ est donc commutative dans $\left\{A_V,\, V \in \mathbb{R}^3\right\}$ et donc dans $\mathcal{S}$.
- Élément neutre
  $e_0 = (1, 0, 0)$ correspond à la matrice identité, dont le déterminant est 1, et qui est élément neutre du produit matriciel.
  C'est donc l'élément neutre pour la loi $*$.
- Éxistence d'un symétrique
  On cherche V' tel que $V * V' = e_0$, c'est à dire tel que $A_V \times A_{V'} = I_3$.
  On aura bien sûr $A_{V'} = A_V^{-1}$.
  $A_V^{-1} = \begin{pmatrix} x^2 - yz & z^2 - xy & y^2 - zx \\ y^2 - zx & x^2 - yz & z^2 - xy \\ z^2 - xy & y^2 - zx & x^2 - yz \end{pmatrix}$ obtenu après quelques calculs et simplifications...
  Cette matrice est bien une matrice de $\left\{A_V,\, V \in \mathbb{R}^3\right\}$, donc, le symétrique de V pour la loi $*$ existe et vaut $\left(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx\right)$.

On a bien une structure de groupe commutatif !

IV.C.3) L'équation de $\mathcal{S}$ est $(x + y + z)\left(x + \mathrm{j}\, y + \mathrm{j}^2 z\right)\left(x + \mathrm{j}^2 y + \mathrm{j}\, z\right) = 1$.

Les deux derniers facteurs sont des complexes conjugués, leur produit est le carré de leur module, positif.

Donc $x + y + z > 0$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que : $x + y + z = \mathrm{e}^{-2t}$.

Le carré du module des deux autres facteurs est donc e^{2t}, leur module est donc e^{t}.

Donc il existe un unique $u \in \mathbb{U}$ tel que : $x + \mathrm{j}\, y + \mathrm{j}^2 z = \mathrm{e}^{t}\, u$.

Le dernier facteur est son conjugué : $x + \mathrm{j}^2\, y + \mathrm{j}\, z = \mathrm{e}^t\, \overline{u}$.

On resout le système $\begin{cases} x + y + z = \mathrm{e}^{-2t} \\ x + \mathrm{j}\, y + \mathrm{j}^2\, z = \mathrm{e}^t\, u \\ x + \mathrm{j}^2\, y + \mathrm{j}\, z = \mathrm{e}^t\, \overline{u} \end{cases}$

$L_1 + L_2 + L_3$ donne : $3x = \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t\, u + \mathrm{e}^t\, \overline{u} = \mathrm{e}^{-2t} + 2\cos(\theta)\, \mathrm{e}^t$,

$L_1 + \mathrm{j}^2\, L_2 + \mathrm{j}\, L_3$ donne : $3y = \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{j}^2\, \mathrm{e}^t\, u + \mathrm{j}\, \mathrm{e}^t\, \overline{u} = \mathrm{e}^{-2t} + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) \mathrm{e}^t$

et $L_1 + \mathrm{j}\, L_2 + \mathrm{j}^2\, L_3$ donne : $3z = \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{j}\, \mathrm{e}^t\, u + \mathrm{j}^2\, \mathrm{e}^t\, \overline{u} = \mathrm{e}^{-2t} + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \theta\right) \mathrm{e}^t$.

Un tel point $M\,(x, y, z)$ est bien, par construction des coordonnées, un point de $\mathcal{S}$.

D'autre part, pour un point $M \in \mathcal{S}$, on a donc bien un unique couple $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$ tel que $F\,(t, u) = M$.

On a en effet d'abord la valeur de t qui est imposée par la valeur de $x + y + z$, puis celle de u par l'argument de $x + \mathrm{j}\, y + \mathrm{j}^2\, z$.

F réalise une bijection de $\mathbb{R} \times \mathbb{U}$ sur $\mathcal{S}$.

IV.C.4) J'espère qu'on ne me tiendra pas trop rigueur d'écourter quelque peu les calculs qui suivent !

$(x + y + z)\,(x + y + z) = x'' + y'' + z'' = \mathrm{e}^{-2t}\, \mathrm{e}^{-2t'} = \mathrm{e}^{-2(t+t')}$,

$\left(x + \mathrm{j}\, y + \mathrm{j}^2\, z\right)\left(x + \mathrm{j}\, y + \mathrm{j}^2\, z\right) = x'' + \mathrm{j}\, y'' + \mathrm{j}^2\, z'' = u\,u' = u''$,

$\left(x + \mathrm{j}^2\, y + \mathrm{j}\, z\right)\left(x + \mathrm{j}^2\, y + \mathrm{j}\, z\right) = x'' + \mathrm{j}^2\, y'' + \mathrm{j}\, z'' = \overline{u}\,\overline{u'} = \overline{u''}$,

donc $F\,(t, u) * F\,(t', u') = F\,(t + t', u\,u')$.

F réalise un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R} \times \mathbb{U}, (+, .))$ sur $(\mathcal{S}, *)$.